

# Sobre la Geometría en las Teorías de Cuerdas Minimales

Memoria de Tesis Doctoral realizada por

**Juan Pedro Resco**

Presentada ante el Departamento de Física Teórica  
de la Universidad Autónoma de Madrid  
para la obtención del título de Doctor en Ciencias

**DIRECTOR: Dr. D. César Gómez López**

Profesor de Investigación del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

**TUTOR: Dr. D. Enrique Álvarez Vázquez**

Catedrático del Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1. Generalidades sobre la Teoría de Cuerdas . . . . .            | 8         |
| 1.1.1. Efectos no Perturbativos: D-branas . . . . .                | 11        |
| 1.2. Geometría Cuántica en Modelos Sencillos . . . . .             | 12        |
| 1.3. Organización de la Memoria . . . . .                          | 14        |
| <b>2. Modelos Minimales</b>  | <b>17</b> |
| 2.1. Módulos de Verma . . . . .                                    | 17        |
| 2.1.1. Representaciones de peso máximo . . . . .                   | 18        |
| 2.1.2. Caracteres de Virasoro . . . . .                            | 20        |
| 2.1.3. Vectores Singulares y Módulos de Verma Reducibles . . . . . | 21        |
| 2.2. El Determinante de Kac . . . . .                              | 21        |
| 2.3. Modelos Minimales . . . . .                                   | 24        |
| 2.3.1. Un Ejemplo Sencillo . . . . .                               | 24        |
| 2.3.2. Truncación del Álgebra de Operadores . . . . .              | 27        |
| 2.3.3. Modelos Minimales . . . . .                                 | 28        |
| <b>3. Gravedad Cuántica en Dos Dimensiones</b>                     | <b>31</b> |
| 3.1. Teoría de Liouville Cerrada . . . . .                         | 31        |
| 3.1.1. Soluciones Clásicas . . . . .                               | 32        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 3.1.2.    | Correcciones Cuánticas a la Teoría Clásica . . . . .      | 39         |
| 3.1.3.    | Teoría Cuántica . . . . .                                 | 47         |
| 3.2.      | Estados de Frontera en la Teoría de Liouville . . . . .   | 54         |
| 3.2.1.    | Primarios Singulares en Liouville . . . . .               | 54         |
| 3.2.2.    | Teoría de Liouville en el Disco: FZZT brana . . . . .     | 57         |
| 3.2.3.    | Condiciones Dirichlet para $\phi$ : La ZZ brana . . . . . | 62         |
| 3.3.      | Acoplo a Materia . . . . .                                | 65         |
| 3.3.1.    | Cuerdas Minimales . . . . .                               | 68         |
| 3.3.2.    | Anillo Fundamental . . . . .                              | 71         |
| 3.3.3.    | Branas de Liouville y Cuerdas Minimales . . . . .         | 74         |
| <b>4.</b> | <b>Modelos de Matrices</b>                                | <b>79</b>  |
| 4.1.      | Polinomios Ortogonales . . . . .                          | 82         |
| 4.1.1.    | Función de Partición en el Límite Planar . . . . .        | 83         |
| 4.1.2.    | Mas allá del Límite Planar . . . . .                      | 84         |
| 4.1.3.    | Ecuaciones KdV . . . . .                                  | 86         |
| 4.2.      | Loops en la Red . . . . .                                 | 90         |
| 4.2.1.    | Ecuaciones de Loops . . . . .                             | 92         |
| 4.3.      | Fermiones Libres . . . . .                                | 94         |
| 4.3.1.    | Distribuciones de autovalores . . . . .                   | 95         |
| 4.3.2.    | Superficies de Fermi y Límite Continuo . . . . .          | 97         |
| <b>5.</b> | <b>La Geometría de la Cuerda Minimal</b>                  | <b>103</b> |
| 5.1.      | Superficie Auxiliar $X_{p,q}$ . . . . .                   | 103        |
| 5.1.1.    | Cortes de Ramificación y Superficies de Riemann . . . . . | 107        |
| 5.2.      | Superficie Auxiliar y Modelos de Matrices . . . . .       | 108        |
| 5.3.      | Geometría Cuántica . . . . .                              | 111        |
| 5.3.1.    | Límite Continuo . . . . .                                 | 112        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 5.3.2.    | El resolvente y su Estructura Analítica . . . . .         | 113        |
| 5.4.      | El Modelo Gaussiano . . . . .                             | 115        |
| 5.4.1.    | Resolvente Cuántico . . . . .                             | 116        |
| 5.4.2.    | El Fenómeno de Stokes . . . . .                           | 118        |
| <b>6.</b> | <b>Sistemas Mecánicos Unidimensionales</b>                | <b>121</b> |
| 6.1.      | Sistemas Integrables . . . . .                            | 121        |
| 6.2.      | Parámetros de Stokes . . . . .                            | 123        |
| 6.3.      | Aproximación Uniforme . . . . .                           | 127        |
| 6.4.      | Formalismo de Weyl-Wigner . . . . .                       | 130        |
| 6.5.      | Límite Clásico de Sistemas Integrables . . . . .          | 132        |
| 6.6.      | Dinámica Semiclásica . . . . .                            | 134        |
| 6.7.      | Catástrofes . . . . .                                     | 138        |
| <b>7.</b> | <b>Cuerdas Minimales y Sistemas Mecánicos</b>             | <b>143</b> |
| 7.1.      | Recordatorio de Geometría Clásica . . . . .               | 144        |
| 7.2.      | Sistema Mecánico Auxiliar . . . . .                       | 146        |
| 7.3.      | Cuantización de Cuerdas Minimales . . . . .               | 149        |
| 7.3.1.    | Geometría Cuántica y Catástrofes . . . . .                | 151        |
| 7.3.2.    | Geometría Cuántica y el Fenómeno de Stokes . . . . .      | 153        |
| 7.4.      | Modelos de Matrices y Sistemas Mecánicos . . . . .        | 153        |
| 7.4.1.    | Funciones de Wigner . . . . .                             | 154        |
| 7.4.2.    | Analogía Mecánica . . . . .                               | 155        |
| 7.4.3.    | Límite Continuo . . . . .                                 | 156        |
| 7.5.      | Aproximación Semiclásica en la Función de Onda . . . . .  | 158        |
| 7.6.      | Catástrofes y Límite Continuo . . . . .                   | 159        |
| 7.7.      | Branas ZZ y Singularidades en el Espacio-Tiempo . . . . . | 161        |
| 7.7.1.    | El Modelo (2, 3) . . . . .                                | 163        |

4

*ÍNDICE GENERAL*

**8. Conclusiones** **167**

**A. El Fenómeno de Stokes** **171**

# Capítulo 1

## Introducción

Durante el siglo pasado el marco clásico de la física sufrió una profunda revolución. La imagen newtoniana de la naturaleza resulto inadecuada para describir los sucesos que ocurrían a tamaños muy pequeños o velocidades próximas a la de la luz . Para tratar de describir ambos límites se desarrollaron dos nuevas teorías: la mecánica cuántica y la relatividad einsteniana. Con la mecánica cuántica se pretendía dar sentido a los resultados que se estaban obteniendo en los experimentos a escalas muy pequeñas (átomos y moléculas) y representa una ruptura profunda con las ideas de Newton. Básicamente, según esta teoría no podemos conocer posiciones y velocidades de partículas <sup>1</sup> (que es la suposición básica en los trabajos de Newton) sino tan solo ciertas probabilidades para diferentes resultados experimentales. Dicha teoría es no determinista en el sentido de Laplace ya que no fija el resultado de un experimento para condiciones iniciales controladas sino que nos da una distribución de probabilidad para los diferentes resultados. Pero no se trata de una teoría puramente estocástica ya que la evolución de dicha densidad de probabilidad si es determinista y viene marcada por una ecuación diferencial (la ecuación de Schroedinger). La mecánica cuántica es una teoría tremendamente exitosa a nivel predictivo y está respaldada por multitud de resultados experimentales. La relatividad de Einstein es en cierto sentido

---

<sup>1</sup>Aquí con partículas nos estamos refiriendo a puntos materiales.

un teoría mucho menos revolucionaria que la mecánica cuántica puesto que no ataca tan profundamente la visión newtoniana de la naturaleza ya que a un nivel teórico pretende conciliar dos teorías clásicas: La mecánica de Newton y la electrodinámica de Maxwell. Si uno se toma en serio las ecuaciones de Maxwell se encuentra con que el principio de relatividad clásico (de Galileo) debe modificarse para mantener invariante bajo cambios de sistema de referencia la dinámica de los campos electromagnéticos. Esto hace que la mecánica de Newton deba ser modificada para caer en una dinámica relativista para las partículas. Aun es más, esta nueva dinámica nos dice que el número de partículas de un sistema no es algo fijo (como lo era en la mecánica de Newton y en la mecánica cuántica) sino que puede variar en función de la energía disponible en el sistema. Esta teoría (que recibe el nombre de relatividad especial) también tiene un amplio apoyo experimental.

En los años 30 del siglo XX nos encontramos con dos teorías que parecen explicar los sucesos de la microfísica (a bajas energías) y los sucesos a alta energía (macroscópicos). Tiene sentido preguntarse que ocurre cuando tenemos sucesos que involucran sistemas muy pequeños pero nos encontramos a energías muy altas. Ambas teorías no resultan compatibles entre si por lo que se hace necesario conciliarlas en una teoría nueva. Por este motivo se construye la teoría cuántica de campos, que trata de conciliar los postulados de la mecánica cuántica con las ideas de la relatividad especial. En dicho marco el concepto de partícula e interacción se diluye y tanto las partículas que forman la materia como las diferentes interacciones viene descritas por un mismo objeto: El campo cuántico. Esta teoría en la forma de sus diferentes modelos (electrodinámica cuántica, cromodinámica cuántica, modelo electro-débil) parece explicar todos los datos experimentales que tiene en cuenta altas energías y tamaños muy pequeños (la física de partículas elementales).

En toda esta aventura nos estamos olvidando de un ingrediente importante: La gravitación. La gravedad es la interacción entre partículas a la que Newton concede mayor atención ya que con ella pretende explicar el movimiento de los cuerpos celestes. El problema es que el modelo de interacción gravitatoria propuesto con Newton se basa (como

toda su teoría) en el principio de relatividad de Galileo, por lo que no resulta compatible con las ideas de la relatividad especial. Einstein consigue conciliar ambas ideas ( $\sim 1910$ ) construyendo una nueva teoría de la gravitación (llamada relatividad generalizada) que se reduce al modelo de Newton para energías bajas pero difiere de él a altas energías. En esta teoría la interacción gravitatoria se describe como la geometría en la que las partículas se mueven. La geometría está determinada por la distribución de energía presente. Dicha gravitación einsteniana tiene también una amplia confirmación experimental. Es importante notar que la gravitación de Einstein continúa siendo una teoría clásica (en el sentido de no cuántica).

Este nuevo ingrediente nos deja en una nueva encrucijada. Por un lado tenemos una teoría con amplia base experimental llamada teoría cuántica de campos que explica todos los datos experimentales para la física de partículas elementales (altas energías y pequeño tamaño) si pagamos el precio de olvidar la interacción gravitatoria. Por otro lado tenemos una teoría también con muchos experimentos a su favor (la relatividad generalizada) que se aplica a objetos macroscópicos. El problema que nos encontramos entonces es como describir objetos microscópicos a altas energías en los que la interacción gravitatoria tenga un efecto importante. En otras palabras, debemos encontrar una teoría que contenga como límites tanto la mecánica cuántica como la relatividad general.

Si uno intenta basarse en el éxito de la teoría cuántica de campos y utilizar los mismos trucos para construir dicha teoría unificada se encuentra con un problema grave, ya que el modelo no tiene sentido desde un punto de vista mecano-cuántico. Esto se debe a que al construir un modelo en teoría cuántica de campos uno debe tener en cuenta la propiedad de renormalizabilidad. Renormalizable solo significa que a preguntas físicas con sentido el modelo debe dar respuestas con sentido (aquí un sin sentido sería por ejemplo una probabilidad infinita para un proceso dado). Cuando uno construye directamente el modelo asociado a la gravitación de Einstein cae en una de estas teorías enfermas<sup>2</sup>. Esto nos

---

<sup>2</sup>Siempre que tratamos estos conceptos nos estamos manteniendo dentro de un esquema perturbativo.

lleva a pensar que debemos ser un poco más radicales si queremos compatibilizar tanto la relatividad general como la mecánica cuántica.

Dentro de esta filosofía de encontrar aproximaciones nuevas al problema de conciliar ambas teorías se encuadra la teoría de cuerdas. Esta teoría propone que las diferentes partículas en interacciones no son más que los diferentes modos de vibración de una cuerda, incluida la interacción gravitatoria!. Al ser clásicamente la gravedad de Einstein una teoría de la geometría del espacio-tiempo nos debemos encontrar con una descripción cuántica de la geometría espacio-temporal. En esta memoria trataremos de acercarnos a una descripción de este concepto para modelos de cuerdas sencillos.

## 1.1. Generalidades sobre la Teoría de Cuerdas

Para estudiar una teoría de cuerdas<sup>3</sup> que se mueven en un espacio la primera aproximación en la que se puede pensar es la de considerar una acción para una única cuerda

$$S_{NG} = T \int dA \quad (1.1)$$

donde  $T$  representa la tensión de la cuerda y  $dA$  es el elemento de área de la superficie barrida por la cuerda con el paso del tiempo. Con dicha acción estamos imponiendo un área mínima para las configuraciones clásicas de la cuerda moviéndose por el espacio. Si consideramos un espacio  $M$  parametrizado por las coordenadas  $X^m$  entonces el elemento de área viene dado por

$$dA = d^2x \sqrt{\det(\partial_i X^m \partial_j X^n G_{mn}(X))} \quad (1.2)$$

donde  $x^i$  son las coordenadas sobre la superficie barrida por la cuerda y  $G$  es la métrica del espacio  $M$ . De momento estamos tratando el espacio  $M$  clásicamente y como un fondo que no se ve modificado por la presencia de la cuerda. Dicha acción resulta difícil de cuantizar

---

<sup>3</sup>Para una introducción a teoría de cuerdas ver [1–4].

debido a la presencia de la raíz cuadrada con lo que resulta mas útil introducir una métrica auxiliar para la hoja de mundo de la cuerda y definir

$$S_P = \frac{T}{2} \int d^2x \sqrt{g} g^{ij} \partial_i X^m \partial_j X^n G_{mn}(X) + \int d^2x \sqrt{g} D(X) R^{(2)}(g) \quad (1.3)$$

que resulta clásicamente equivalente a  $S_{NG}$ . Aquí  $D$  es una función arbitraria de las coordenadas del espacio  $M$ . Esta última acción tiene las siguientes simetrías clásicas

- Difeomorfismos en la hoja de mundo.
- Cambios de escala locales en la métrica auxiliar  $g$ .

Ya que la métrica  $g$  es un campo auxiliar, queremos que sus grados de libertad desaparezcan de la teoría también cuánticamente. La simetría bajo cambios de escala de la métrica nos dice que estamos considerando una teoría conforme en la hoja del mundo, por lo que imponer que  $g$  no juegue ningún papel cuánticamente es equivalente a decir que la teoría continua siendo conforme cuánticamente. El que una teoría de campos sea conforme nos dice que su función  $\beta$  es nula. El problema es que si calculamos la función  $\beta$  para esta teoría nos encontramos con<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \beta &\sim g^{ij} \partial_i X^m \partial_j X^n (R_{mn}(G) + 2\nabla_m \nabla_n D) \\ &+ R^{(2)}(g) \left( \frac{26 - \dim(M)}{3} T - R(G) - 4\nabla^2 D \right) + O\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $\nabla_m$  denota derivadas covariantes con respecto a  $G$  y  $R_{mn}$  y  $R$  son el tensor de Ricci y la curvatura escalar de  $G$ . Esto impone condiciones no triviales sobre la métrica de  $M$  que deben cumplirse para que la cuerda pueda moverse de forma consistente en  $M$ . Si fijamos  $D(X) = cte$  vemos que al orden que estamos trabajando las condiciones se reducen a<sup>5</sup>

$$R_{mn} = 0 \quad 26 = \dim(M) \quad (1.5)$$

---

<sup>4</sup>El 26 viene de la contribución de los fantasmas que necesitamos introducir al fijar la simetría bajo difeomorfismos en la hoja de mundo.

<sup>5</sup>En el lenguaje de teoría conforme  $\dim(M) = c$  donde  $c$  es la carga central asociada al álgebra de la teoría constituida por los campos  $X$ .

lo que implica que  $M$  debe ser una solución 26-dimensional de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Esta interpretación se conoce como la cuerda crítica.

Existe otra interpretación diferente conocida como no crítica que consiste en suponer que uno de los modos de la métrica  $g$  si tiene un significado físico e identificarlo como una dirección extra en nuestro espacio. Por tanto empezando con la misma acción (1.3) podemos describir tanto cuerdas críticas en espacios de dimensión  $\dim(M) = d$  como cuerdas no críticas en espacios  $\hat{M}$  de dimensión  $\dim(\hat{M}) = \dim(M) + 1 = d + 1$ . El modo de la métrica al que asignamos significado físico en las cuerdas no críticas se conoce como modo de Liouville.

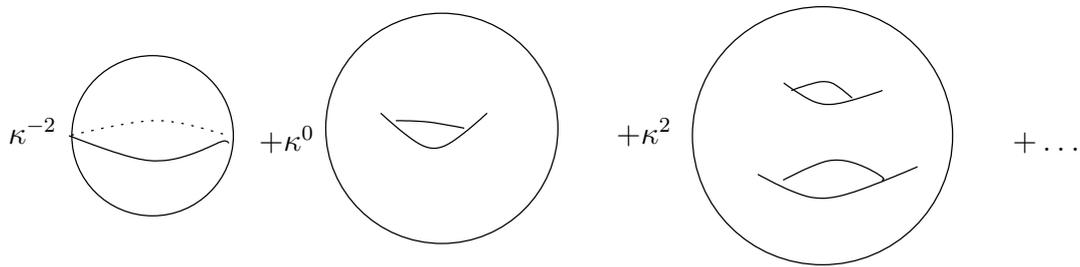
El enfoque que tomaremos en esta memoria será el no crítico, en el que consideraremos una teoría conforme que acoplaremos a la métrica de la hoja de mundo<sup>6</sup>. En esta filosofía un modelo de cuerdas viene determinado simplemente por una teoría conforme y la dinámica de la gravedad en dos dimensiones. La condición  $\beta = 0$  para este caso se traduce simplemente a  $c + c_L = 26$  donde  $c_L$  es la contribución a la carga central que viene del modo de Liouville.

Hasta el momento estamos considerando una sola cuerda. Para introducir interacciones entre cuerdas necesitaríamos una acción de campos de cuerdas que nos genere una serie perturbativa en términos de cierta constante de acoplamiento  $\kappa$ . Debido a los grados de libertad internos de la cuerda esto resulta muy complicado, así que podemos intentar construir la serie perturbativa pictóricamente y calcular cada término dentro de la teoría conforme asociada<sup>7</sup> de tal modo que mantengamos orden a orden la unitariedad. En esta serie la constante de control  $\kappa$  es en principio libre y nos mide la importancia de las correcciones

---

<sup>6</sup>Notar que (1.3) no es una teoría conforme a menos que  $G$  sea la métrica plana. En ese caso la condición de  $\beta = 0$  se reduce a  $d = 26$

<sup>7</sup>Esto es algo que puede hacerse en principio pero para superficies más allá de la esfera resulta muy difícil en la práctica.



Expansión perturbativa de la función de partición.

cuánticas espacio-temporales de la teoría<sup>8</sup>. Con todo esto nos encontramos con una definición operativa para la teoría, pero una definición perturbativa. Por lo que sabemos de teoría cuántica de campos los efectos no perturbativos pueden ser importantes por lo que necesitamos pensar como podemos estudiar dichos efectos con el formalismo que tenemos.

### 1.1.1. Efectos no Perturbativos: D-branas

Hasta el momento no hemos considerado la posible topología de las cuerdas. Resulta obvio que solo puede ser de dos tipos: abiertas y cerradas. En el caso de cuerdas cerradas no tiene sentido preguntarse por condiciones de contorno en los extremos, pero en el caso abierto podemos imponer dos tipos

- Tipo Neumann: Consideramos que el extremo de la cuerda es libre.
- Tipo Dirichlet: Consideramos que el extremo de la cuerda está fijado en alguna subvariedad del espacio tiempo.

Puede verse que si consideramos el segundo tipo de condiciones de contorno y estudiamos la descripción efectiva de dicho sistema de cuerdas nos encontramos con una

---

<sup>8</sup>En el contexto de teorías críticas dicha constante está relacionada con el valor esperado del campo del dilatón, pero esa interpretación no resulta muy útil en el contexto no crítico

configuración solitónica de la teoría (de campos) efectiva [5]. Dichas configuraciones pueden usarse como partículas de prueba para estudiar efectos no perturbativos de la teoría del mismo modo que la solución clásica del instantón en la teoría de Yang-Mills se usa para estudiar efectos no perturbativos en teoría cuántica de campos. Estas ideas se conocen como la segunda revolución en teoría de cuerdas y ha generado una cantidad muy importante de trabajos (ver [6] y las referencias que contiene). Con dichas configuraciones (llamadas D-branas) podemos intentar estudiar la geometría no perturbativa (cuántica) del modelo que estamos considerando ya que los parámetros de móduli de la teoría efectiva en la D-brana pueden interpretarse como coordenadas en dicha geometría cuántica [7]. Al ser las D-branas objetos no perturbativos estaremos teniendo en cuenta desde el principio posibles correcciones no perturbativas al espacio-tiempo.

Hacer esto en la práctica para modelos que nos den una descripción realista del campo gravitatorio espacio-temporal es tremendamente complicado. Para estudiar estos efectos en detalle se hace necesario considerar modelos muy sencillos.

## 1.2. Geometría Cuántica en Modelos Sencillos

En los últimos años ha existido un avance muy importante en la comprensión de la teoría de Liouville perturbativa [8–10] lo que ha permitido entender las reglas de fusión de la teoría y construir objetos estilo D-brana [11–14]. Dichas branas son de dos tipos diferentes: Las branas FZZT (o D1 branas) [11, 12] que están extendidas en la dirección de Liouville y presentan condiciones de tipo Dirichlet en las direcciones asociadas a la materia, y las branas ZZ (o D0 branas) [13] que están localizadas en la dirección de Liouville. Las branas FZZT tienen un parámetro de móduli que corresponde con la constante cosmológica de frontera. Utilizando estas D-branas ha sido posible estudiar problemas de gravedad cuántica para materia muy sencilla (cuerdas minimales [15–19] y modelo  $c = 1$  [20–24]). La idea básica consiste en que la geometría asociada a estos modelos de cuerdas está

codificada en la dinámica (en el espacio de moduli) de dichas branas [7]. En esta memoria nos centraremos en teorías correspondientes a los modelos minimales de tipo  $(2, q)$ .

Al orden mas bajo en la constante de acoplo de la cuerda es posible calcular la amplitud de la brana FZZT y uno encuentra que es una función multivaluada en el parámetro de móduli. Ya que estamos interpretando dicho móduli como la geometría de la cuerda vemos que a orden mas bajo nos aparece una superficie de Riemann. La superficie de Riemann esta caracterizada por la ecuación  $F(x, y) = 0$  de donde deducimos una función multivaluada  $y = y(x)$ . Los cortes de ramificación de  $y(x)$  son los que definen la superficie de Riemann. Es interesante preguntarse como se modifica dicha superficie a ordenes mas altos en la constante de acoplo.

Los modelos de cuerdas no criticas con  $c \leq 1$  admiten una formulación en términos de modelos de matrices [25–27]. Existen multitud de evidencias no triviales en el el cálculo de exponentes críticos [28–32], observables macroscópicos [33–37] y funciones de correlación [38, 39] que permiten creer que los modelos de matrices nos dan una descripción equivalente para dichas cuerdas. Si aceptamos la correspondencia, podemos usar el modelo de matrices para dar una definición no perturbativa del modelo de cuerdas tras tomar cierto límite continuo [40–43]. Por tanto, en principio podremos calcular las correcciones mas altas a la geometría de estos modelos de cuerdas utilizando el límite continuo del modelo de matrices.

En el modelo de matrices el objeto conocido como loop macroscópico corresponde con la amplitud de la FZZT brana al orden mas bajo, lo que nos permite definir la amplitud exacta para la FZZT brana en términos del límite continuo de cierto correlador (la exponencial del loop macroscópico) en el modelo de matrices. Cuando se calcula dicha amplitud exacta uno encuentra [44] que la inclusión de efectos no perturbativos hace que la amplitud de la FZZT deje de ser una función multivaluada del móduli por lo que la superficie de Riemann no aparece.

En esta memoria vamos a desarrollar una aproximación al estudio de esta geometría no perturbativa para cuerdas minimales de tipo  $(2, q)$  utilizando la analogía con un modelo

mecánico [45, 46]. El método que seguiremos consistirá en encontrar una correspondencia entre la amplitud de la brana FZZT y la curva en el espacio de fases de un sistema mecánico integrable. La forma del mapa se deriva directamente de la representación en términos de matrices de la cuerda minimal. Tras caracterizar la geometría clásica de la cuerda minimal en el espacio de fases del sistema mecánico análogo, efectos cuánticos en la geometría se derivan de la dinámica semiclásica en el espacio de fases, que viene descrita por la función de Wigner del sistema mecánico. En el límite clásico, el soporte de la función de Wigner viene dado por la geometría clásica. Dicha geometría clásica define una zona en la que la función de Wigner presenta una singularidad, que debe ser suavizada por efectos cuánticos. Los efectos cuánticos hacen que el soporte de la función de Wigner se extienda por todo el plano de fases de una forma determinada por el tipo de singularidad asociada a la geometría clásica. El límite continuo se obtiene resolviendo la singularidad de la función de Wigner en el punto de retorno clásico. El fenómeno de Stokes descrito en [44] entra en esta analogía de una forma muy natural al fijarnos las contribuciones dominantes a la función de Wigner en las zonas clásicamente prohibidas.

En este contexto las branas de tipo ZZ están relacionadas con el tipo de singularidad en el punto de retorno. Como veremos, introducir correcciones perturbativas en el sistema debidas a la presencia de ZZ branas no resuelve el problema de singularidades en el espacio-tiempo. Se hace necesario tener en cuenta las correcciones no perturbativas asociadas a la aproximación uniforme en los puntos singulares para eliminar dichas singularidades.

### 1.3. Organización de la Memoria

- Capítulo 2: En este capítulo estudiaremos con algo de detalle en que consisten las teorías conformes minimales y como pueden construirse.
- Capítulo 3: Aquí estudiaremos la teoría de gravedad en dos dimensiones, que no es mas que la teoría que describe la dinámica del modo de Liouville. Empezaremos

dando una descripción tanto clásica como cuántica de dicha teoría para después explicar como podemos introducir el concepto de D-brana en este contexto. Finalmente estudiaremos que ocurre cuando acoplamos dicho modo de Liouville a los modelos minimales estudiados en el capítulo anterior y que le ocurre a las D-branas cuando tenemos también materia minimal.

- Capítulo 4: Veremos en que consiste la aproximación discreta a las cuerdas minimales y desarrollaremos la tecnología de los modelos de matrices necesaria para entender el límite continuo. Después analizaremos a que corresponden las D-branas cuando nos movemos en la aproximación discreta y cual es el límite continuo de las mismas. Después daremos la descripción del modelo de matrices en términos de fermiones libres.
- Capítulo 5: Aquí se analizará el como surge la superficie de Riemann auxiliar cuando trabajamos al orden mas bajo en la constante de acoplo de la cuerda para mas tarde analizar como la descripción a primer orden se modifica cuando tenemos en cuenta correcciones no perturbativas utilizando la formulación en términos de un límite continuo de un modelo de matrices. Veremos lo que ocurren en el caso mas sencillo posible (las cuerdas minimales de tipo  $(2, 1)$ ) y que papel juega el fenómeno de Stokes en dichas modificaciones de la geometría.
- Capítulo 6: Este capítulo es en cierto sentido independiente del resto, ya que trata de la descripción del espacio de fases de sistemas mecánicos unidimensionales utilizando el formalismo de Wigner. Se analizaran las catástrofes que aparecen en dichos sistemas y como las correcciones cuánticas las resuelven.
- Capítulo 7: Utilizando el formalismo definido en el capítulo anterior veremos como pueden estudiarse las geometrías asociadas a los modelos minimales y como las correcciones cuánticas se relacionan con las correcciones en el acoplo de la cuerda.



# Capítulo 2

## Modelos Minimales

Los llamados modelos minimales son teorías de campos conformes especialmente simples, ya que su espacio de Hilbert está compuesto por un número finito de representaciones del álgebra de Virasoro (el número de familias conformes es finito). En este capítulo empezaremos describiendo generalidades de los módulos de Verma. Continuaremos describiendo el determinante de Kac y analizando cuestiones de unitariedad. Para una introducción ver [47]

### 2.1. Módulos de Verma

En una teoría conforme, uno espera que los autoestados de la energía (autoestados de  $L_0$  y  $\bar{L}_0$ ) estén clasificados por representaciones del álgebra de Virasoro, del mismo modo que los autoestados de energía están clasificados por representaciones del grupo  $SU(2)$  en el caso de sistemas invariantes bajo rotaciones. En general el espacio de Hilbert de la teoría contendrá un conjunto de representaciones irreducibles del álgebra de Virasoro.

### 2.1.1. Representaciones de peso máximo

Para ilustrar esta sección recordemos como trabajan estos conceptos en el marco de las teorías invariantes bajo rotaciones. Vamos a asumir que el espacio de representaciones esta generado por autoestados  $|m\rangle$  de uno de los generadores de  $SU(2)$ , digamos  $J_z$ . También supondremos que los tres generadores son hermíticos  $J_a^\dagger = J_a$ . Los otros dos generadores de  $SU(2)$  pueden organizarse en términos de operadores escalera de la forma

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y \quad (2.1)$$

que debido al álgebra de  $SU(2)$  satisfacen las reglas de conmutación

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \quad [J_+, J_-] = 2J_z \quad (2.2)$$

Pensemos ahora en autoestados tales que su autovalor  $m$  sea el máximo dentro de la representación. Esos estados, que denotaremos por  $|j\rangle$ , cumplen

$$J_z|j\rangle = j|j\rangle \quad J_+|j\rangle = 0 \quad (2.3)$$

El resto de autoestados de  $J_z$  los podemos sacar aplicando varias veces el operador  $J_-$  sobre el estado  $|j\rangle$ . Definamos los estados no normalizados

$$|m\rangle = J_-^{j-m}|j\rangle \quad (2.4)$$

Es fácil ver que estos estados no están normalizados utilizando el álgebra y las condiciones sobre  $|j\rangle$

$$\langle m-1|m-1\rangle = [j(j+1) - m(m-1)] \langle m|m\rangle \quad (2.5)$$

Mirando la ecuación anterior vemos que pueden aparecer estados de norma negativa cuando  $m$  sea menor que  $-j$ . La representación por tanto es no unitaria. Para evitar esto tenemos que imponer que  $j$  sea un número entero o semientero, por lo que el estado  $| -j-1\rangle$  pasa a tener norma nula, igual que todos los estados que vienen de aplicar  $J_-$  sobre el. Estos vectores singulares desacoplan de los primeros  $(2j+1)$  estados. Esta afirmación la hacemos

en el sentido siguiente: Consideremos un operador  $O$  construido con los generadores de  $SU(2)$ . Es trivial ver que cualquier elemento de matriz  $\langle n|O|m \rangle$  es nulo cuando uno de los estados tiene norma positiva y el otro tiene norma nula. Esto hace que la representación quede truncada a los primeros  $(2j - 1)$  estados.

Vamos a proceder ahora del mismo modo, pero considerando el álgebra de Virasoro

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m} \quad (2.6)$$

donde solo vamos a escribir la parte holomorfa, ya que la antiholomorfa se construye de igual manera pero poniendo barras sobre los objetos. Ya que las dos álgebras están desacopladas, para construir la representación completa basta con tomar productos tensoriales. Vamos a fijar  $L_0$  como diagonal en la representación (siendo precisos, en el módulo de Verma). Denotemos por  $|h \rangle$  al estado de peso máximo

$$L_0|h \rangle = h|h \rangle \quad L_n|h \rangle = 0 \quad n > 0 \quad (2.7)$$

Para construir una base del resto de estados en la representación podemos usar los estados descendientes

$$L_{-k_1} \dots L_{-k_n}|h \rangle \quad 1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \quad (2.8)$$

Estos estados son autoestados de  $L_0$  con autovalor  $h + k_1 + \dots + k_n = h + N$ , donde  $N$  es el nivel del estado. En este espacio de Verma podemos definir la conjugación hermítica de la forma usual  $L_n^\dagger = L_{-n}$  y el producto de dos estado descendientes  $L_{-k_1} \dots L_{-k_m}|h \rangle$  y  $L_{-l_1} \dots L_{-l_n}|h \rangle$  por

$$\langle h|L_{k_1} \dots L_{k_m}L_{-l_1} \dots L_{-l_n}|h \rangle \quad (2.9)$$

donde las condiciones sobre el estado dual  $\langle h|$  son

$$\langle h|L_{-n} = 0 \quad n > 0 \quad (2.10)$$

El producto se calcula moviendo los operadores usando el álgebra de Virasoro y usando las condiciones sobre  $|h \rangle$  y  $\langle h|$ . Notar que el producto de dos estados es nulo a menos que se

encuentren en el mismo nivel. Esto no es mas que la condición de que dos autoestados de un operador hermítico con diferente autovalor son ortogonales. La hermiticidad también nos fuerza a que  $h$  sea un número real.

Si denotamos por  $V_{c,h}$  y  $\bar{V}_{c,\bar{h}}$  los módulos de Verma con peso máximo  $h$  y  $\bar{h}$ , los autoestados de la energía pertenecen al producto tensorial  $V \times \bar{V}$ . En general, el espacio de Hilbert sera una suma a todas las posibles dimensiones conformes

$$\sum_{h,\bar{h}} V_{c,h} \times \bar{V}_{c,\bar{h}} \quad (2.11)$$

donde el número de términos en el sumatorio puede ser finito o infinito y pueden existir diferentes términos con la misma dimensión conforme.

### 2.1.2. Caracteres de Virasoro

Dado un módulo de Verma  $V_{c,h}$  podemos definir una función generatriz  $\chi_{c,h}(t)$  llamada carácter del módulo

$$\chi_{c,h}(t) = \text{tr} q^{L_0 - c/24} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{dim}(h+n) q^{n+h-c/24} \quad (2.12)$$

donde  $q = e^{2\pi i t}$  y  $\text{dim}(h+n)$  es el número de estados linealmente independientes en el nivel  $n$  del módulo de Verma y  $t$  es una variable compleja. Ya que  $\text{dim}(h+n) \leq p(n)$ , donde  $p(n)$  es el número de estados posibles en el nivel  $n$ , la serie es convergente para  $|q| < 1$  (es decir, cuando  $t$  esta en el semiplano superior del plano complejo). Los caracteres son las funciones generatrices de los niveles de degeneración  $\text{dim}(h+n)$ . Los caracteres antiholomorfos se definen del mismo modo.

Para un módulo de Verma genérico (aquel en el que todos los estados posibles son independientes) basta recordar que  $p(n)$  es el número de posibles particiones en números enteros del entero  $n$  para poder escribir

$$\chi_{c,h}(t) = \frac{q^{h+(1-c)/24}}{\eta(t)} \quad (2.13)$$

donde  $\eta$  es la función de Dedekind

$$\eta(t) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (2.14)$$

### 2.1.3. Vectores Singulares y Módulos de Verma Reducibles

Puede ocurrir que la representación generada por los estados descendientes sea reducible. Esto significa que existe un subespacio del módulo de Verma que es en si mismo un módulo de Verma. Dicho submódulo sera generado por un estado  $|w\rangle$  que cumple  $L_n|w\rangle = 0$  y puede escribirse como un descendiente de  $|h\rangle$ .

En general, cualquier estado diferente de  $|h\rangle$  que sea aniquilado por todos los operadores de destrucción se llama vector singular. Dicho estado genera su propio módulo de Verma  $V_w$  incluido dentro de  $V_{c,h}$ . Todo vector singular es ortogonal a todo el módulo de Verma. En particular tiene norma nula. Esto también es valido para todos sus descendientes. Decir esto es equivalente a decir que un vector singular es ortogonal a todos los estados en el módulo de Verma original que tengan su mismo nivel.

Para construir una representación irreducible a partir de la representación reducible original basta con identificar todos los vectores que difieran entre si en un estado de norma nula. El nuevo módulo de Verma contiene menos estados que el original, y su forma para el carácter no es tan simple como la de un módulo genérico. Estas representaciones serán las piezas que usaremos para construir los modelos minimales.

## 2.2. El Determinante de Kac

Una representación del álgebra de Virasoro se dice unitaria si no contiene estados de norma negativa. La ausencia de este tipo de estados impone condiciones sobre los valores posibles de  $h$  y  $c$ . La cota de unitariedad se obtiene calculando la norma del estado  $L_{-n}|h\rangle$

$$\langle h|L_n L_{-n}|h\rangle = \langle h|(L_{-n}L_n + 2nL_0 + \frac{1}{12}c(n^3 - n))|h\rangle \quad (2.15)$$

$$= (2nh + \frac{c}{12}(n^3 - n)) \langle h|h \rangle$$

Cuando  $c < 0$  su norma pasa a ser negativa para  $n$  suficientemente grande. Por tanto, todas las representaciones con carga central negativa son no unitarias. El caso  $n = 1$  nos dice también que todas las representaciones con dimensión conforme negativa son también no unitarias.

La condición que hay que considerar para resolver todos estos problemas de unitariedad consiste en analizar la matriz de Gram de los productos entre todos los elementos de la base. Si denotamos los estados base del módulo de Verma por  $|i\rangle$  definimos los elementos de la matriz de Gram (por definición hermítica)

$$M_{ij} = \langle i|j \rangle \quad (2.16)$$

Esta matriz es diagonal en bloques  $M^n$  donde  $n$  denota los diferentes niveles. Un elemento genérico es una combinación lineal  $|a\rangle = \sum_i a_i |i\rangle$  y su norma viene dada por

$$\langle a|a \rangle = a^\dagger M a \quad (2.17)$$

Ya que  $M$  es hermítica, podemos diagonalizarla usando una matriz unitaria  $U$ ,  $M = UDU^\dagger$ . Si  $b = Ua$  entonces

$$\langle a|a \rangle = \sum_i D_i |b_i|^2 \quad (2.18)$$

Por tanto, la condición para que no existan estados de norma negativa es que la matriz  $M$  no tenga autovalores negativos. Con esta condición aun pueden existir vectores singulares si algún autovalor es nulo, por lo que la representación podría ser reducible.

Las matrices  $M^n$  asociadas a los niveles mas bajos de un modulo de Verma genérico pueden calcularse fácilmente

$$M^0 = 1 \quad (2.19)$$

$$M^1 = 2h \quad (2.20)$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4h(2h+1) & 6h \\ 6h & 4h + c/2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

De  $M^0$  no sacamos ninguna condición de unitariedad. Con  $M^1$  sacamos la condición ya conocida  $h > 0$ . El caso de  $M^2$  es mas interesante. El producto de los dos autovalores de  $M^2$  es igual a su determinante

$$\det M^2 = 32h^3 - 20h^2 + 4h^2c + 2hc = 32(h - h_{1,1})(h - h_{1,2})(h - h_{2,1}) \quad (2.22)$$

donde

$$h_{1,1} = 0 \quad (2.23)$$

$$h_{1,2} = \frac{1}{16}(5 - c - \sqrt{(1-c)(25-c)}) \quad (2.24)$$

$$h_{2,1} = \frac{1}{16}(5 - c + \sqrt{(1-c)(25-c)}) \quad (2.25)$$

La suma de autovalores es igual a la traza

$$\text{tr} M^2 = 8h(h + 1) + c/2 \quad (2.26)$$

La representación sera no unitaria si bien la traza, bien el determinante, o bien ambos son negativos.

Existe una fórmula general para el determinante de la matriz de Gram llamada determinante de Kac [48, 49]

$$\det M^n = a_n \prod_{r,s} [h - h_{r,s}]^{p(n-rs)} \quad (2.27)$$

donde  $r, s \geq 1$  y  $rs \leq n$ . En esta fórmula  $p(n-rs)$  es el número de posibles particiones del número entero  $n-rs$  y  $a_n$  es una constante positiva independiente de  $h$  y  $c$ . Las cantidades  $h_{r,s}$  viene dadas por

$$h_{rs} = h_0 + \frac{1}{4}(ra_+ + sa_-)^2 \quad (2.28)$$

$$h_0 = \frac{c-1}{24} \quad (2.29)$$

$$a_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \quad (2.30)$$

Otra forma de expresar las raíces del determinante de Kac es

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad (2.31)$$

$$h_{r,s} = \frac{((m+1)r - ms) - 1}{4m(m+1)} \quad (2.32)$$

Una tercera forma de escribir estas cantidades es

$$c = 13 - 6(t + 1/t) \quad (2.33)$$

$$h_{r,s} = \frac{1}{4}(r^2 - 1)t + \frac{1}{4}(s^2 - 1)\frac{1}{t} - \frac{rs - 1}{2} \quad (2.34)$$

donde estamos parametrizando la carga central en términos de un número complejo  $t$ . En términos de  $t$

$$a_+ = \sqrt{t} \quad a_- = -\frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.35)$$

Puede demostrarse que las representaciones con  $c \geq 1$  y  $h \geq 0$  son todas unitarias. En toda esta memoria solo vamos a interesarnos por teorías con  $c < 1$ . Puede verse que toda la región con  $c < 1$  esta cubierta por teorías no unitarias excepto en la serie de puntos discretos dados por

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad (2.36)$$

$$h_{r,s} = \frac{((m+1)r - ms) - 1}{4m(m+1)} \quad (2.37)$$

donde ( $1 \leq r < m$ ) y ( $1 \leq s \leq r$ ) y  $m$  es un entero mayor o igual a 2. [50]

## 2.3. Modelos Minimales

### 2.3.1. Un Ejemplo Sencillo

Vamos a estudiar un ejemplo sencillo de módulo de Verma reducible. Consideremos  $V_{c,h}$  y el estado del segundo nivel

$$|w \rangle = (L_{-2} + vL_{-1}^2)|h \rangle \quad (2.38)$$

Vamos a intentar ajustar  $v$  y  $h$  de tal modo que el estado sea singular. Para ello basta con imponer

$$L_1|w \rangle = L_2|w \rangle = 0 \quad (2.39)$$

Utilizando el álgebra de Virasoro tenemos

$$L_1|w \rangle = (3 + 2v + 4hv)L_{-1}|h \rangle \quad (2.40)$$

$$L_2|w \rangle = (4h + 6hv + c/2)|h \rangle \quad (2.41)$$

luego las condiciones que hay que imponer para que  $|w \rangle$  sea singular son

$$v = -\frac{3}{2(2h+1)} \quad (2.42)$$

$$h = \frac{1}{16}(5 - c \pm \sqrt{(1-c)(25-c)}) \quad (2.43)$$

luego el estado singular solo existe si el determinante de Kac es nulo. En la notación de la sección anterior vemos que la condición es  $h = h_{1,2}$  o bien  $h = h_{2,1}$ .

A cada estado en un módulo de Verma uno puede asociarle un campo descendiente por la correspondencia estados-operadores que se da en las teorías conformes. En particular uno puede asociar un campo singular  $w(z)$  a cada estado singular  $|w \rangle$ . Dicho campo sera un descendiente del campo primario  $O(z)$  de peso conforme  $h$ , pero es a su vez un campo primario de peso conforme  $h+2$ . Usando la correspondencia de estados y operadores vemos que la expresión para el campo singular el

$$w(z) = O^{-2}(z) - \frac{3}{2(2h+1)}\partial^2 O(z) \quad (2.44)$$

Que el estado singular sea ortogonal a todo el módulo de Verma se traduce en el lenguaje de campos a que cualquier correlador que tenga  $w(z)$  insertado sera nulo, es decir, que el campo  $w$  desacopla del resto de campos. Al ser  $w$  un campo descendiente de  $O$ , la condición de que  $w$  sea singular impone sobre los correladores

$$0 = (\ell_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}\ell_{-1}^2) \langle O(z) \dots \rangle \quad (2.45)$$

donde los puntos suspensivos denotan cualquier otro operador local  $O_1(z_1) \dots O_N(z_N)$ . Esta condición puede escribirse en forma de ecuación diferencial sobre el correlador

$$0 = \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{z - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{h_i}{(z - z_i)^2} \right) - \frac{3}{2(2h + 1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle O(z) \dots \rangle \quad (2.46)$$

Esta ecuación diferencial no nos dice nada nuevo en el caso de la función de correlación a dos puntos. La ecuación anterior queda

$$0 = \left( \frac{1}{z - z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{h}{(z - z_1)^2} - \frac{3}{2(2h + 1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle O(z) O(z_1) \rangle \quad (2.47)$$

que se satisface trivialmente dada la forma general de la función a dos puntos  $\langle O_1 O_2 \rangle = (z_1 - z_2)^{-2h}$ . Pero esta ligadura si impone condiciones sobre la función a tres puntos. La forma general de la misma es

$$\langle O(z) O(z_1) O(z_2) \rangle = \frac{C(h, h_1, h_2)}{(z - z_1)^{h_2 - h - h_1} (z_1 - z_2)^{h - h_2 - h_1} (z - z_2)^{h_1 - h - h_2}} \quad (2.48)$$

donde  $C$  es una constante que depende de los pesos conformes y que no esta fijada por la invariancia conforme global, pero si por el álgebra de operadores que tenga la teoría. La ligadura que estamos considerando impone condiciones sobre los pesos conformes involucrados. Se ve que la condición es

$$2(2h + 1)(h - 2h_2 - h_1) = 3(h - h_1 + h_2)(h - h_1 + h_2 + 1) \quad (2.49)$$

Si usamos esta ecuación para despejar  $h_2$  tenemos

$$h_2 = \frac{1}{6} + \frac{h}{3} + h_1 \pm \frac{2}{3} \sqrt{h^2 + 3hh_1 - \frac{h}{2} + \frac{3h_1}{2} + \frac{1}{16}} \quad (2.50)$$

Esta solución para  $h_2$  resulta mas elegante si adoptamos la notación para los pesos conformes

$$h(a) = h_0 + \frac{a^2}{4} \quad h_0 = \frac{c - 1}{24} \quad (2.51)$$

Si  $a_1$  y  $a_2$  corresponden a  $h_1$  y  $h_2$  tenemos las soluciones

$$a_2 = a_1 \pm a_+ \quad h = h_{2,1} \quad (2.52)$$

$$a_2 = a_1 \pm a_- \quad h = h_{1,2} \quad (2.53)$$

Por tanto, la existencia de vectores singulares en el nivel dos impone condiciones adicionales sobre la función a tres puntos, las cuales son equivalentes a condiciones sobre el álgebra de operadores. Si llamamos  $O_a$  al operador con peso conforme  $h(a)$ , entonces

$$[O_{2,1}] \times [O_a] = [O_{a-a_+}] + [O_{a+a_+}] \quad (2.54)$$

$$[O_{1,2}] \times [O_a] = [O_{a-a_-}] + [O_{a+a_-}] \quad (2.55)$$

donde el producto indica expansión en producto de operadores y los corchetes indican que nos referimos a toda la familia conforme, no solo a los primarios. Esto es un ejemplo de reglas de fusión.

### 2.3.2. Truncación del Álgebra de Operadores

Las condiciones sobre el álgebra de operadores que se derivan de la existencia de un vector singular en el segundo nivel pueden generalizarse. Si tenemos  $h = h_{r,s}$  entonces existe un vector nulo en el nivel  $rs$ . Esto se sigue inmediatamente de la fórmula del determinante de Kac. Dicho vector nulo impone condiciones similares sobre el álgebra de operadores.

$$[O_{r,s}] \times [O_a] = \sum_{k,l} [O_{a+ka_++la_-}] \quad (2.56)$$

donde  $(1-r \leq k \leq r-1)$ ,  $(1-s \leq l \leq s-1)$ , y  $(k+r)$  y  $(l+s)$  son impares. Veamos que consecuencias tiene esto.

Lo primero que nos encontramos es que las familias conformes  $[O_{r,s}]$  asociadas con módulos reducibles forman un conjunto cerrado en el álgebra de operadores. Por ejemplo

$$[O_{2,1}] \times [O_{r,s}] = [O_{r-1,s}] + [O_{r+1,s}] \quad (2.57)$$

$$[O_{1,2}] \times [O_{r,s}] = [O_{r,s-1}] + [O_{r,s+1}] \quad (2.58)$$

Que esto ocurra impone condiciones muy fuertes sobre la dinámica de teorías con ciertos valores de carga central y ciertos pesos conformes asociados. Notar que el que una familia conforme aparezca en las reglas de fusión no quiere decir que este realmente allí (su

coeficiente puede ser cero). Las reglas de fusión solo sirven para excluir familias conformes como resultado de producto de operadores. Para ver un ejemplo de esto consideremos

$$[O_{2,1}] \times [O_{1,2}] = [O_{0,2}] + [O_{2,2}] \quad (2.59)$$

$$[O_{1,2}] \times [O_{2,1}] = [O_{2,0}] + [O_{2,2}] \quad (2.60)$$

Al ser ambos productos equivalentes, esto nos dice que los coeficientes que acompañan a  $[O_{2,0}]$  y  $[O_{0,2}]$  son ambos cero. Por tanto, el álgebra de operadores se trunca a

$$[O_{2,1}] \times [O_{1,2}] = [O_{2,2}] \quad (2.61)$$

Este fenómeno de truncación puede generalizarse y nos resulta

$$[O_{r_1, s_1}] \times [O_{r_2, s_2}] = \sum_{k, l} [O_{k, l}] \quad (2.62)$$

donde  $(1 + |r_1 - r_2| \leq k \leq r_1 + r_2 - 1)$ ,  $(1 + |s_1 - s_2| \leq l \leq s_1 + s_2 - 1)$ , y  $k + r_1 + r_2$  y  $l + s_1 + s_2$  son impares.

### 2.3.3. Modelos Minimales

Para un valor genérico de la carga central el álgebra de operadores implica que existen un número infinito de familias conformes en la teoría, ya que podemos generar familias  $[O_{r, s}]$  con  $r, s$  todo lo grandes que queramos aplicando todas las veces que sean necesarias las reglas de fusión. Pero, si la carga central es tal que existen dos enteros primos entre si  $p$  y  $q$ , tales que

$$qa_- + pa_+ = 0 \quad (2.63)$$

entonces los pesos conformes satisfarán una condición de periodicidad

$$h_{r, s} = h_{r+p, s+q} \quad (2.64)$$

En términos de estos enteros la carga central y la fórmula de Kac se escriben

$$c = 1 - 6 \frac{(p - q)^2}{pq} \quad (2.65)$$

$$h_{r, s} = \frac{(pr - qs)^2 - (p - q)^2}{4pq} \quad (2.66)$$

Es fácil ver que no se pierde generalidad si suponemos que  $p$  y  $q$  son positivos y que  $p < q$ .

Notar también la simetría

$$h_{r,s} = h_{p-r,q-s} \quad (2.67)$$

De las expresiones explícitas para la carga central y los pesos conformes en términos de estos números enteros es fácil ver también que

$$h_{r,s} + rs = h_{p+r,q-s} = h_{p-r,q+s} \quad (2.68)$$

$$h_{r,s} + (p-r)(q-s) = h_{r,2q-s} = h_{2p-r,s} \quad (2.69)$$

Esto implica que el vector singular en el módulo de Verma  $V_{r,s}$  es el vector de peso máximo de un módulo de Verma degenerado. Además vemos que el módulo  $V_{r,s}$  contiene otro vector singular en el nivel  $(p-r)(q-s)$ . Los dos vectores singulares dan lugar a submódulos que también contienen vectores singulares de la misma forma y así sucesivamente. Por tanto, tenemos un número infinito de vectores singulares en el módulo de Verma  $V_{r,s}$ . Cada vector singular tiene su propia ecuación diferencial actuando como una ligadura sobre los correladores de la teoría y el álgebra de operadores. El efecto neto de todas estas ligaduras es un truncación adicional del álgebra de operadores, dando lugar a un número finito de familias conformes que son cerradas bajo las reglas de fusión. El conjunto finito de pesos conformes viene delimitado por  $h_{r,s}$  con  $1 \leq r < p$  y  $1 \leq s < q$ . Por tanto solo tenemos  $(p-1)(q-1)/2$  primarios diferentes en la teoría.

Este conjunto de teorías aquí definidas se llaman modelos minimales, ya que solo tienen un número finito de campos locales con comportamiento bajo dilataciones bien definido.

Las reglas de fusión que existen en estas teorías son

$$[O_{r_1,s_1}] \times [O_{r_2,s_2}] = \sum_{k,l} [O_{k,l}] \quad (2.70)$$

donde  $(1 + |r_1 - r_2| \leq k \leq \min(r_1 + r_2 - 1, 2p - 1 - r_1 - r_2))$ ,  $(1 + |s_1 - s_2| \leq l \leq \min(s_1 + s_2 - 1, 2q - 1 - s_1 - s_2))$ , y  $(k + r_1 + r_2)$  y  $(l + s_1 + s_2)$  son impares. Por supuesto

para considerar la teoría completa tenemos que hacer el producto tensorial con la parte antiholomorfa. Un espacio de Hilbert genérico tendrá la forma

$$H = \sum_{h, \bar{h}} M_{c,h} \times \bar{M}_{c,\bar{h}} \quad (2.71)$$

Una forma particular de hacer este producto tensorial es multiplicando al módulo  $M_{c,h_r,s}$  por el correspondiente módulo antiholomorfo  $\bar{M}_{c,h_r,s}$ . La teoría resultante se llama diagonal. Llamaremos a el modelo minimal asociado a los enteros  $p, q$   $M_{p,q}$ .

Como es fácil ver de las condiciones de unitariedad, los únicos modelos minimales unitarios son los que cumplen  $q = p + 1$ .

# Capítulo 3

## Gravedad Cuántica en Dos Dimensiones

En este capítulo estudiaremos como describir una teoría de gravedad cuántica usando la teoría de Liouville. Empezaremos describiendo las soluciones clásicas de la misma para después explicar las peculiaridades de su cuantización. Mas tarde veremos como el concepto de D-brana (siendo mas preciso el de estado de frontera) puede implementarse en esta teoría para después estudiar el acoplo a materia. En esta memoria la única materia que consideraremos serán los modelos minimales.

### 3.1. Teoría de Liouville Cerrada

Existen varios motivos para interesarse por la teoría de gravedad en dos dimensiones. Para empezar puede pensarse en ella como un modelo simplificado de la gravedad en cuatro dimensiones. Pero también podemos pensar en ella como una teoría en la hoja de universo para teorías de cuerdas tanto críticas como no críticas. En esta sección estudiaremos la gravedad en dos dimensiones desde un punto de vista continuo, dejando la aproximación discreta para el capítulo siguiente. Una introducción excelente a la teoría de Liouville

cerrada puede encontrarse en [51].

El problema básico de la gravedad cuántica es el problema de integrar sobre todo el espacio de métricas (en el sentido de integral funcional) teniendo en cuenta la simetría bajo difeomorfismos. Usaremos el gauge conforme

$$g_{mn} = e^{2b\phi} \hat{g}_{mn}(t) \quad (3.1)$$

donde  $b$  es un parámetro y  $\hat{g}$  es una métrica de fondo (representante de una clase conforme).  $t$  son los parámetros del espacio de módulos de estructuras conformes y a  $\phi$  se le llama modo de Liouville.

Para estudiar este sistema podemos basarnos en la acción [52]

$$I \sim \int \sqrt{\hat{g}} (\hat{g}^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + \frac{1}{b} \phi R(\hat{g}) + \mu e^{2b\phi}) \quad (3.2)$$

donde  $b$  toma el papel de constante de acoplamiento.

La simetría bajo difeomorfismos nos permite escoger  $\hat{g} = e^p \delta$ , fijar  $p = 0$  mediante una traslación en  $\phi$  y utilizar coordenadas complejas  $z, \bar{z}$ . La acción arriba descrita corresponde clásicamente a una teoría conforme con las invariancias

$$z \rightarrow \omega = f(z) \quad \phi(z) \rightarrow \phi(f(z)) - \frac{1}{b} \log |\partial f|^2 \quad (3.3)$$

tal que el elemento de línea

$$ds^2 = e^{2b\phi} dz d\bar{z} \quad (3.4)$$

permanece invariante.

### 3.1.1. Soluciones Clásicas

Consideremos primeramente la teoría desde un punto de vista clásico. Si fijamos la métrica de fondo a una delta tenemos para la acción <sup>1</sup>

$$I = \frac{1}{4\pi} \int d^2x (\partial_m \phi \partial^m \phi + \frac{1}{b} \phi R(\hat{g}) + 4\mu e^{2b\phi}) \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>En principio con una métrica de fondo plana no veríamos el término de curvatura, pero lo mantendré visible por razones que quedaran claras mas adelante.

Esta acción tiene soluciones clásicas estables para  $\mu > 0$ . La ecuación de movimiento queda

$$\frac{\delta I}{\delta \phi} = 0 = 4\mu b e^{2b\phi} - \partial^2 \phi \quad (3.6)$$

o lo que es lo mismo, la métrica  $g = e^{2b\phi} \delta$  tiene curvatura constante negativa.

El tensor energía-momento puede calcularse variando la acción con respecto a la métrica de fondo<sup>2</sup>

$$T_{mn} = 2\pi \frac{\delta I}{\delta \hat{g}^{mn}} \quad (3.7)$$

Usando las ecuaciones de movimiento tenemos

$$T_{z\bar{z}} = 0 \quad (3.8)$$

$$T_{zz} = -(\partial\phi)^2 + \frac{1}{b}\partial^2\phi \quad (3.9)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = -(\bar{\partial}\phi)^2 + \frac{1}{b}\bar{\partial}^2\phi \quad (3.10)$$

Que el termino cruzado sea nulo es una consecuencia de la invariancia conforme. Este tensor energía-momento no es propiamente un tensor bajo las transformaciones (3.3) ya que aparece un termino extra

$$T(z) \rightarrow (\partial f)^2 T(f) + \frac{c}{12} S(z, f) \quad (3.11)$$

donde  $S$  es la derivada Schwarziana de la transformación y  $c = \frac{6}{b^2}$ .

Consideremos ahora el formalismo de variables canónicas en el espacio de Minkowski para esta teoría. Definamos el sistema en un cilindro plano con coordenadas  $s \in [0, 2\pi]$  parametrizando la dirección espacial, y  $t$  parametrizando el tiempo. El momento conjugado del campo  $\phi$  es  $\Pi = \frac{\delta I}{\delta(\partial_t \phi)} = \frac{1}{4\pi} \partial_t \phi$  y el corchete de Poisson canónico sera

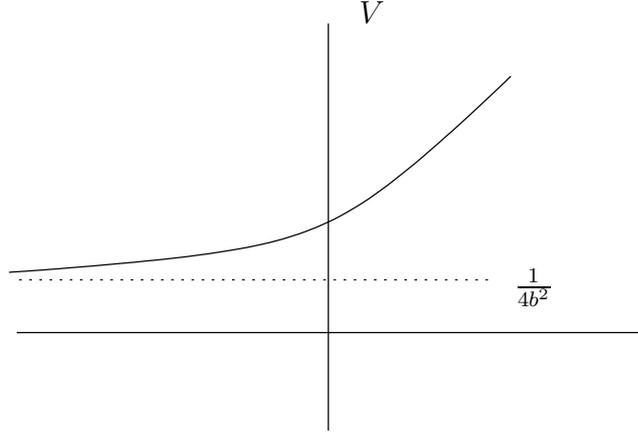
$$[\phi(s, t), \Pi(s', t)]_{PB} = \delta(s - s') \quad (3.12)$$

En las coordenadas del cono de luz  $x^\pm = s \pm t$  el tensor energía momento es

$$T_{+-} = 0 \quad (3.13)$$

---

<sup>2</sup>Tenemos que variar también el término de curvatura antes de fijar la métrica de fondo a una delta



Potencial para el modo de Liouville en la aproximación de mini-superespacio

$$\begin{aligned} T_{++} &= (\partial_+ \phi)^2 - \frac{1}{b} \partial_+^2 \phi + \frac{1}{4b^2} = \\ &= \frac{1}{4} (4\pi\Pi + \phi)^2 - \frac{1}{2b} (4\pi\Pi + \phi)' + \frac{1}{4b^2} + \mu e^{2b\phi} \end{aligned} \quad (3.14)$$

El término  $\frac{1}{4b^2}$  aparece por el cambio de variables que pasa de la esfera al cilindro  $z = e^{t+is}$  usando la derivada Schwarziana.

Las componentes de Fourier del tensor energía-momento

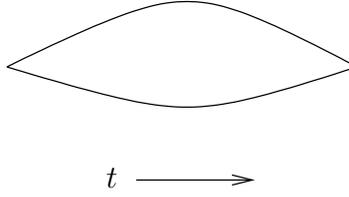
$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds e^{ins} T_{++}(s, t) \quad (3.15)$$

satisfacen el álgebra de Virasoro

$$i[L_n(t), L_m(t)]_{PB} = (n - m)L_{n+m}(t) + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n} \quad (3.16)$$

donde  $c = \frac{6}{b^2}$ . El corchete de Poisson de  $L_n$  con  $e^{a\phi}$  nos dice que  $e^{a\phi}$  es un campo primario con peso conforme  $h = \frac{a}{2b}$ . Veamos ahora que aspecto tienen las soluciones clásicas de esta teoría en el espacio de Minkowski. Por simplificar vamos a considerar primero las soluciones independientes de la coordenada espacial  $s$ . Esta simplificación se conoce como la aproximación de mini-superespacio. Cuando  $\phi = \phi_0(t)$  las ecuaciones de movimiento en el espacio de Minkowski se reducen a las de una partícula moviéndose en el potencial

$$V = \frac{1}{4b^2} + \mu e^{2b\phi_0} \quad (3.17)$$



Solución minkowskiana independiente de la coordenada espacial.

Todas las soluciones clásicas tenderán a  $\mp pt$  cuando  $t$  tienda a  $\pm\infty$  donde la partícula es esencialmente libre y  $p > 0$  es el momento. La solución general es

$$e^{2b\phi_0(t)} = \frac{\sqrt{2}p^2}{8b\mu} \frac{e^{2pbt}}{(1 - e^{2pbt})^2} \quad (3.18)$$

y representa simplemente el rebote de la partícula contra la barrera de potencial. Notar que no existe solución con momento  $p = 0$  y que la solución con momento  $p$  es la misma que la con momento  $-p$ . La energía de la solución es

$$\frac{p^2}{16} + \frac{1}{4b^2} > \frac{1}{4b^2} \quad (3.19)$$

Soluciones mas generales con dependencia en la coordenada espacial viene dadas localmente por

$$e^{2b\phi} = \frac{1}{b^2\mu} \frac{A'(x^+)B'(x^-)}{(1 - AB)^2} \quad (3.20)$$

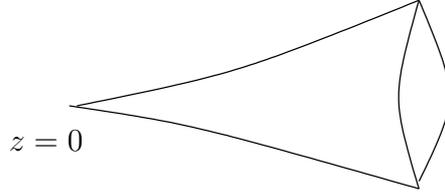
donde  $A$  y  $B$  no necesitan ser univaluadas en el cilindro. Basta con que  $\phi$  lo sea.

Las soluciones clásicas mas interesantes aparecen cuando nos movemos al espacio euclídeo. La solución en este caso viene dada por

$$e^{2b\phi} = \frac{1}{b^2\mu} \frac{\partial A(z)\bar{\partial} B(\bar{z})}{(1 - AB)^2} \quad (3.21)$$

donde  $A$  es una función holomorfa en  $z$  y  $B$  es antiholomorfa.  $A$  y  $B$  transforman bajo  $SL(2, R)$  cuando  $z \rightarrow e^{2\pi i}z$ . El tensor energía momento para esta solución es

$$T = -\frac{1}{4b^2}(\partial(\log \partial A))^2 + \frac{1}{2b^2}\partial^2(\log \partial A) = \frac{1}{2b^2}S(z, A) \quad (3.22)$$

Solución elíptica. Singularidad cónica en  $z = 0$ 

que es manifiestamente holomorfo.

Dependiendo de la clase de monodromía que tengan  $A$  y  $B$  existen tres tipos de soluciones: elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

1. Soluciones elípticas: Para estas soluciones<sup>3</sup>

$$A = z^a \quad B = \bar{z}^a \quad (3.23)$$

y el tensor energía momento es

$$T = \frac{1 - a^2}{4b^2 z^2} \quad (3.24)$$

donde  $a$  es un número real. La monodromía es  $A \rightarrow e^{2\pi ia} A$ . La solución con  $a$  coincide con la solución con  $-a$  luego se puede fijar  $a > 0$ . Esta solución presenta una singularidad de curvatura en  $z = 0$  y satisface

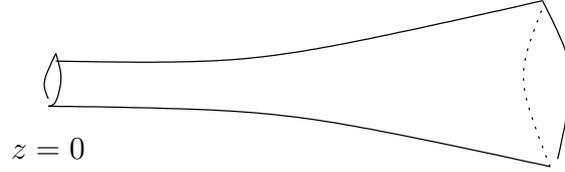
$$\partial^2 \phi - 4\mu b e^{2b\phi} + 2\pi \frac{1-a}{b} \delta^{(2)}(z) = 0 \quad (3.25)$$

Cuando  $z$  tiende a 0 la métrica tiende a una métrica plana con una singularidad cónica en el origen<sup>4</sup>. En esa región el momento ( $t \rightarrow -\infty$ ) tiende a  $a/2b$  que es real en el espacio euclídeo, por lo que es imaginario en el espacio de Minkowski.

---

<sup>3</sup>Tanto en este caso como en los posteriores solo consideraremos las soluciones independientes de la coordenada espacial.

<sup>4</sup>Para  $a = 1$  no existe tal singularidad, la monodromía es trivial y la métrica corresponde a la de la esfera

Solución parabólica. Inserción en  $z = 0$ .

2. Soluciones parabólicas: Estas se obtienen como el límite en el que  $a$  tiende a 0 en las soluciones parabólicas. Vienen dadas por

$$A = i \log z \quad B = \frac{i}{\log \bar{z}} \quad (3.26)$$

con tensor energía-momento

$$T = \frac{1}{4b^2 z^2} \quad (3.27)$$

La monodromía es  $A \rightarrow A - 2\pi$ . Esta solución tiene también una singularidad de curvatura en el origen que es la mitad de la curvatura de la esfera. Corresponde por tanto a una inserción.

$$\partial^2 \phi - 4b\mu e^{2b\phi} + 2\pi \frac{1}{b} \delta^{(2)}(z) = 0 \quad (3.28)$$

Cuando  $z$  tiende a 0 el momento se anula. La métrica en esta región no corresponde a una métrica plana debido a la inserción.

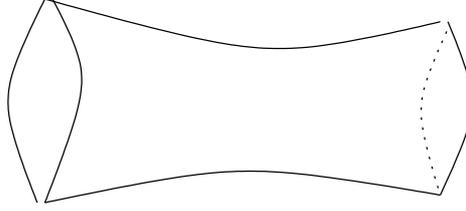
3. Soluciones hiperbólicas: Este tipo de soluciones corresponden a  $a$  imaginario puro. Su forma es

$$A = z^{im} \quad B = \bar{z}^{im} \quad (3.29)$$

con tensor energía-momento

$$T = \frac{1 + m^2}{4b^2 z^2} \quad (3.30)$$

La monodromía es  $A \rightarrow e^{-2\pi m} A$ , y la métrica es de curvatura constante negativa. Como en los otros casos la solución depende solamente del módulo de  $m$  y no de su signo. Cuando  $m$  tiende a cero caemos en el caso parabólico. Estas soluciones son las



Solución hiperbólica. No se corresponde con perturbaciones locales en la superficie.

extensiones euclídeas de las soluciones en espacio de Minkowski. No existen análogos en Minkowski para las soluciones parabólicas y elípticas.

La forma de la solución clásica

$$e^{2b\phi} = \frac{1}{b^2\mu} \frac{\partial A(z)\bar{\partial} B(\bar{z})}{(1-AB)^2} \quad (3.31)$$

anima a considerar objetos de la forma

$$e^{-2jb\phi} = \left(\frac{1}{b^2\mu}\right)^{-j} \left(\frac{1}{\sqrt{\partial A}} \frac{1}{\sqrt{\bar{\partial} B}} - \frac{A}{\sqrt{\partial A}} \frac{B}{\sqrt{\bar{\partial} B}}\right)^{2j} \quad (3.32)$$

Para  $2j$  un entero positivo

$$e^{-2jb\phi} = \left(\frac{1}{b^2\mu}\right)^{-j} \sum_{m=-j}^j \psi_m^j(z) \psi^{jm}(\bar{z}) \quad (3.33)$$

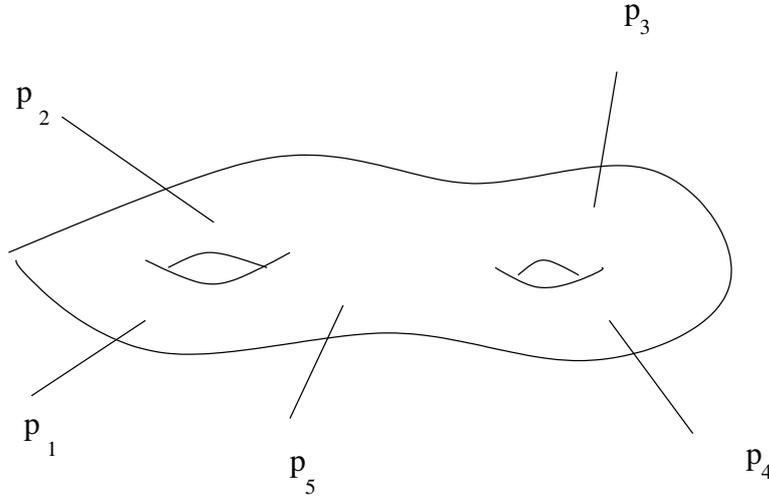
es una suma finita de productos de campos holomorfos y antiholomorfos. Bajo una transformación  $SL(2, R)$  el campo  $\psi_m^j$  transforma como una representación de spin  $j$  (de dimensión  $2j+1$ ) de  $SL(2, R)$ . Para  $2j$  un entero negativo la descomposición en campos holomorfos y antiholomorfos es infinita, y también se ordenan en representaciones de  $SL(2, R)$  [53–58].

Los dos campos con  $j = 1/2$   $\psi_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\partial A}}$ ,  $\psi_{1/2} = \frac{A}{\sqrt{\partial A}}$  satisfacen

$$(\partial^2 + b^2 T)\psi_{\pm 1/2}(z) = 0 \quad (3.34)$$

Dichos campos pueden ser “bosonizados”

$$\psi_{\pm 1/2}(z) = e^{-bk_{\pm}} \quad (3.35)$$



Correlador de genus 2 con 5 inserciones.

En términos de  $k_{\pm}$

$$T = -(\partial k_{\pm})^2 + \frac{1}{b} \partial^2 k_{\pm} \quad (3.36)$$

En [53–58] se muestra que los campos  $k_{\pm}$  y sus respectivos momentos satisfacen paréntesis de Poisson libres. El paréntesis de Poisson entre  $k_+$  y  $k_-$  es complicado ya que ambos campos no son independientes. Uno de los campos puede escribirse en términos del otro. Todo esto nos dice que la teoría puede escribirse en términos de un único campo libre. Esto se conoce como transformación de Backlund.

### 3.1.2. Correcciones Cuánticas a la Teoría Clásica

Pasemos ahora a considerar correcciones cuánticas a esta teoría clásica (el tratamiento cuántico completo lo analizaremos en una sección posterior). En la teoría cuántica los objetos que nos interesan son las funciones de correlación de la forma

$$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle = \int D\phi e^{-I} \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \quad (3.37)$$

De momento vamos a considerar correcciones en  $b$  a los resultados clásicos (con  $b$  pequeño). Notar que la expansión en  $b$  tiene sentido, no así la expansión en  $\mu$  ya que podemos cambiar su valor simplemente trasladando  $\phi$  con lo que no tiene sentido decir que tenga un valor pequeño. Siendo mas explícitos, la forma general de los correladores es

$$\mu^\alpha F(x_i, t) \quad (3.38)$$

donde  $\alpha$  es en general un número fraccionario y  $F$  es una función del módulo de la superficie y de la posición de las inserciones que es independiente de  $\mu$ . Esta función  $F$  en general no puede calcularse mediante una expansión en potencias de  $\mu$  (existen excepciones, y cierto tipo de funciones de correlación si son analíticas en  $\mu$  y pueden calcularse mediante expansión en la constante cosmológica. Veremos un ejemplo en capítulos posteriores).

Para empezar el análisis vamos a fijar todos los  $p_i$  grandes de orden  $1/b$ . Las contribuciones dominantes a la integral funcional (3.37) vienen dadas por las soluciones clásicas  $\phi_{cl}$  que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$-\frac{\delta I(\phi_{cl})}{\delta \phi} + \sum_i p_i \delta^{(2)}(z_i) = \frac{1}{2\pi} \partial^2 \phi_{cl} - 2b \frac{\mu}{\pi} e^{2b\phi_{cl}} + \sum_i p_i \delta^{(2)}(z_i) = 0 \quad (3.39)$$

Si integramos esta ecuación de movimiento sobre la superficie tenemos

$$b \sum_i p_i + 2g - 2 - 2b^2 \frac{\mu}{\pi} A = 0 \quad (3.40)$$

donde  $A$  es el área de la superficie y  $g$  es su genus (el número de asas). Mirando esta ecuación vemos que la solución clásica solamente existe cuando

$$b \sum_i p_i + 2g - 2 > 0 \quad (3.41)$$

condición que de momento asumiremos.

Las soluciones de las ecuaciones de movimiento son métricas de curvatura constante y negativa. Los operadores  $e^{p\phi}$  aparecen como fuentes de curvatura en las ecuaciones de movimiento y producen soluciones con monodromía elíptica con  $a = 1 - bp$ . El operador

con  $p = 1/b$  crea una inserción en la superficie y lo llamaremos operador inserción. Para  $p < 1/b$  la perturbación en la superficie es menor que una inserción. Para  $p > 1/b$  no existe la solución clásica.

Después de encontrar la solución clásica podemos aproximar la integral funcional mediante la formula estándar

$$\int D\phi e^{-I} \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} = e^{-I(\phi_{cl}) + \sum_i p_i \phi_{cl}(x_i)} \det\left(\frac{\delta^2 I(\phi_{cl})}{\delta \phi^2}\right) (1 + O(b^2)) \quad (3.42)$$

El exponente  $-I(\phi_{cl}) + \sum_i p_i \phi_{cl}(x_i)$  es infinito. La divergencia viene de la autointeracción de las fuentes. Para calcular fácilmente estas divergencias basta con escribir el primer término en  $I$  como  $-\frac{1}{4\pi} \int \phi \partial^2 \phi$  y utilizar las ecuaciones de movimiento para eliminar  $\partial^2 \phi$ . La divergencia entonces aparece como términos de la forma  $\log |z_i - z_j|$  que podemos regular por  $-\log \Lambda^2$  introduciendo un corte a energías altas  $\Lambda$ . La divergencia por la autointeracción de una fuente  $e^{p\phi}$  con  $p \leq 1/b$  da una contribución  $(\Lambda)^{p^2/4}$  a la integral funcional, por lo que para tener respuestas finitas necesitamos renormalizar los operadores

$$e^{p\phi} \rightarrow (\Lambda)^{-p^2/4} e^{p\phi} \quad (3.43)$$

Esta divergencia tiene una interpretación sencilla. Nos dice que la dimensión conforme del operador  $e^{p\phi}$  no es  $p/2b$  como en el caso clásico, sino que es

$$\frac{p}{2b} - \frac{1}{4} p^2 + O(1) \quad (3.44)$$

Esta interpretación es consistente con la forma del tensor energía momento para las soluciones clásicas parabólicas e elípticas. El coeficiente en  $1/z^2$  es la dimensión del operador. La corrección cuántica en la dimensión ocurre porque tenemos que regularizar las fluctuaciones cuánticas de  $\phi$ . Para  $p \sim 1/b$  esto aparece como divergencias en la acción clásica. Si despreciamos el término de interacción la divergencia no es mas que la del campo libre. Es importante también notar que las soluciones hiperbólicas no corresponden a inserciones de operadores locales.

Si  $X = \sum_i p_i + \frac{1}{b}(2g - 2) \leq 0$  entonces la solución clásica no existe, por lo que es útil definir la función de Green a área fija insertando  $1 = \int dA \delta(\int e^{2b\phi} - A)$  en la integral funcional

$$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_A = \int D\phi e^{-I + \frac{\mu}{\pi} A} \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \delta(\int e^{2b\phi} - A) \quad (3.45)$$

$$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle = \int dA \langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_A e^{-\frac{\mu}{\pi} A} \quad (3.46)$$

$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_A$  puede evaluarse en la aproximación semiclassical. La ligadura en el área es representada por un un multiplicador de Lagrange y la ecuación de movimiento clásica nos dice que la superficie tiene curvatura constante excepto en las fuentes. Si  $X > 0$  la solución tiene curvatura negativa. Si  $X = 0$  la superficie es plana, y para  $X < 0$  tiene curvatura positiva.

Mediante una traslación en el campo

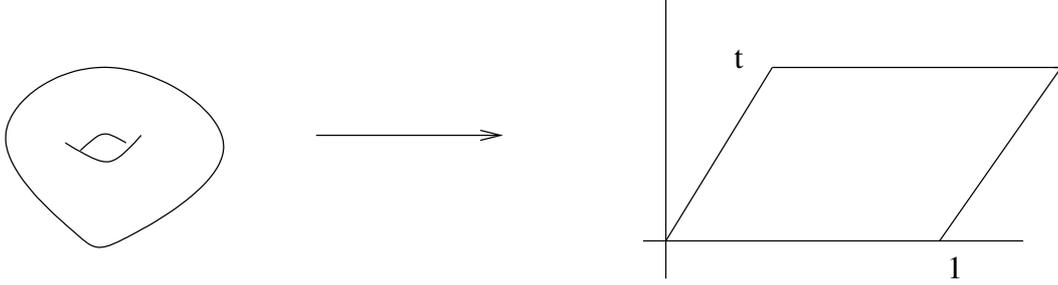
$$\phi \rightarrow \phi + \frac{1}{2b} \log A \quad (3.47)$$

se ve que

$$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_A = A^{-1+X/2b} \langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_{A=1} \quad (3.48)$$

Para  $X > 0$  la integral sobre el área para obtener la función de correlación natural es convergente y reproduce los resultados que obtuvimos antes. Para  $X = 0$  la integral diverge logaritmicamente y para  $X < 0$  diverge como una potencia.

Esta divergencia aparece en la región de áreas pequeñas  $\phi \rightarrow -\infty$ . Para regularizarla uno necesita introducir un corte en el espacio de campos. Desde el punto de vista de la teoría de Liouville con una métrica de fondo  $\hat{g}$  este corte no corresponde a un regulador ultravioleta, ya que no está asociado a pequeñas distancias medidas con la métrica  $\hat{g}$ . A pesar de esto, podemos pensar en esta divergencia como una divergencia ultravioleta, ya que la métrica de la superficie es  $g$ , con lo que cualquier regulador invariante bajo



Toro plano sin inserciones.

cambios de coordenadas en la integral sobre  $g$  nos valdría. Con este regulador

$$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle = P(\mu) + \mu^{-X/2b} C \langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_{A=1} \quad (3.49)$$

donde  $C$  es una constante independiente tanto del módulo como de la constante cosmológica, y  $P$  es un polinomio de orden  $n = [-X/2b]$ . Cuando  $-X/2b$  es un entero no negativo el factor  $\mu^{-X/2b}$  va multiplicado por  $\log \mu$ . La parte analítica  $P$  depende del regulador ultravioleta, y no describe superficies de área macroscópica, por lo que no se espera que sea universal. La parte no analítica si es universal y puede estudiarse en la aproximación semiclásica. Cuando  $\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_{A=1} = 0$  la función de correlación viene toda ella de la contribución de superficies de área pequeña (del tamaño del regulador ultravioleta) y es analítica en  $\mu$ .

Consideremos ahora algunos ejemplos importantes:

1. Superficies de genus unidad sin inserciones. En este caso  $X = 0$ . Con la métrica plana del toro  $\hat{g} = \delta$  la solución clásica es

$$e^{2b\phi_{cl}} = \frac{A}{Imt} \quad (3.50)$$

donde  $t$  es la estructura compleja del toro. Si expandimos  $\phi = \phi_{cl} + \phi_q$  las ligaduras sobre la medida y el área pasan a ser

$$\|\delta\phi\|^2 = \int e^{2b\phi} (\delta\phi)^2 \sim e^{2b\phi_{cl}} \int (\delta\phi_q)^2 \quad (3.51)$$

$$\delta\left(\int e^{2b\phi} - A\right) \sim \frac{1}{2bA} \delta\left(\frac{1}{Imt} \int \phi_q\right) \quad (3.52)$$

La integral funcional sobre  $\phi_q$  es la misma que en la teoría libre

$$\langle 1 \rangle_A \sim \frac{1}{4\pi b A \sqrt{2Imt} |\eta(q)|^2} = \frac{1}{2\sqrt{2bA}\pi} \int_0^\infty dp \frac{(q\bar{q})^{p^2/4}}{|\eta(q)|^2} \quad (3.53)$$

y tal y como esperábamos la integral sobre el área es logaritmicamente divergente

$$\int dA \langle 1 \rangle_A e^{-A\mu} \sim \frac{1}{4\pi b \sqrt{2Imt} |\eta(q)|^2} \log \frac{\Lambda^2}{\mu} \quad (3.54)$$

2. Función a  $n$  puntos en la esfera  $\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle$  con  $p_i \sim 1$ . En este caso  $X = -\frac{1}{b} + \sum_i p_i \sim -\frac{1}{b} < 0$  y debemos fijar el área. La solución clásica no se ve afectada por la presencia de inserciones. Es simplemente la métrica de la esfera y depende de 3 parámetros reales asociados con la acción del grupo  $PSL(2, C)$  en la solución clásica (solo hay tres parámetros reales y no seis por la simetría  $SO(3)$ )

$$e^{2b\phi_{cl}} \sim \frac{A}{(|az + b|^2 + |cz + d|^2)^2} \quad (3.55)$$

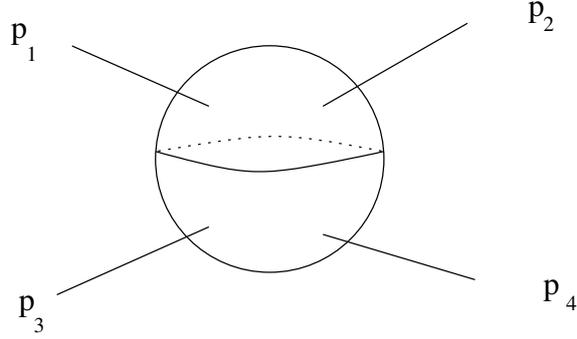
donde  $ad - bc = 1$ . La función de correlación viene dada en términos de una integral sobre estas coordenadas colectivas con la medida invariante

$$\int d^2 a d^2 b d^2 c d^2 d \delta^{(2)}(ad - bc - 1) \quad (3.56)$$

con lo que tenemos

$$\langle \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \rangle_A \sim A^{\frac{1}{2b} \sum_i p_i - \frac{1}{2b^2} - 1} \int_{PSL(2, C)} \prod_i e^{p_i \phi(x_i)} \quad (3.57)$$

donde nos estamos olvidando de un factor independiente de la posición de las inserciones que viene de un determinante de los modos no nulos. Aunque la solución que hemos encontrado no parece invariante bajo traslaciones, la integral sobre las coordenadas colectivas restaura esta simetría. Debido a que la región de integración es no compacta, pueden aparecer algunas divergencias para ciertos valores de  $p_i$ .



Correlador a 4 puntos en la esfera

Estos infinitos pueden evitarse continuando analíticamente en  $p_i$ . Para la función a dos puntos  $\langle e^{p\phi(\infty)} e^{q\phi(0)} \rangle$  encontramos una integral divergente cuando integramos sobre el subgrupo del grupo de Mobius que deja el 0 y el  $\infty$  invariantes (llamemos a este subgrupo  $D$ ). Queremos interpretar esta divergencia como una función delta

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} x^{(q-p)/b} = \int_{-\infty}^\infty ds e^{s(q-p)/b} \sim \delta(p-q) \quad (3.58)$$

Esta prescripción conduce a una función de correlación invariante bajo  $SL(2, C)$

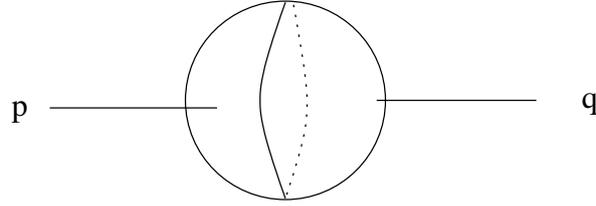
$$\langle e^{p\phi(0)} e^{q\phi(x)} \rangle_A \sim A^{\frac{p}{2b} - \frac{1}{b^2} - 1} \frac{\delta(p-q)}{|x|^{4h_p}} \quad (3.59)$$

donde para  $p \sim 1$ ,  $h_p = p/2b$ . Cuando  $p = q$  la función de correlación es infinita y proporcional al volumen del grupo  $D$

$$\text{vol}(D) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty \quad (3.60)$$

3. Función a dos puntos en la esfera  $\langle e^{p\phi(\infty)} e^{q\phi(0)} \rangle$  con  $p, q \sim 1/2b$ . Ya que tanto  $p$  como  $q$  son menores que  $1/2b$ ,  $X < 0$  y tenemos que trabajar a área fija. Para  $p = q$  existe una familia de soluciones clásicas

$$e^{2b\phi_{cl}} \sim \frac{Ax^{2-2pb}}{|z|^{2pb} (1 + (\frac{|z|}{x})^{2-2pb})^2} \quad (3.61)$$



Función de correlación a dos puntos en la esfera.

como en el caso  $p \sim 1$  al integrar sobre  $x$  encontramos el volumen infinito del grupo  $D$ . Para  $p \neq q$  no existe solución clásica. Para verlo de forma mas explicita consideremos una transformación en  $\phi$

$$\phi(z) \rightarrow \phi(xz) - \frac{1}{b} \log |x|^2 \quad (3.62)$$

Bajo esta transformación tenemos

$$-I + p\phi(0) + q\phi(\infty) \rightarrow -I + p\phi(0) + q\phi(\infty) + \frac{q-p}{2b} \log |x|^2 \quad (3.63)$$

Cuando  $p > q$  la configuración de acción mínima ocurre para  $x = 0$ . Si separamos el modo  $x$  en la integral funcional, encontramos de nuevo  $\int_0^\infty \frac{dx}{x} x^{(q-p)/b}$  que interpretamos de nuevo como una función delta.

Estos dos últimos ejemplos ilustran bien que la teoría de Liouville es diferente a una teoría libre. Como en la teoría libre, el espectro es continuo, y la función a dos puntos en la esfera es divergente, pero los correladores con mas inserciones son finitos. La divergencia tiene un origen geométrico no como en el caso libre en el que viene de una integral sobre modos cero. Pero a pesar del origen diferente las divergencias en la teoría de Liouville son formalmente idénticas a las de una teoría libre. Es decir, todas las divergencias de la teoría son equivalentes a las derivadas de los problemas de orden normal.

### 3.1.3. Teoría Cuántica

La forma mas sencilla de cuantizar la teoría es utilizando el formalismo canónico [59–63]. Basta con descomponer en modos de Fourier en el cilindro el campo y momento conjugado

$$\phi(s, t) = \phi_0(t) + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{n} (a_n(t)e^{-ins} + b_n(t)e^{ins}) \quad (3.64)$$

$$\Pi(s, t) = p_0(t) + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi} (a_n(t)e^{-ins} + b_n(t)e^{ins}) \quad (3.65)$$

donde  $a_n^\dagger = a_{-n}$ ,  $b_n^\dagger = b_{-n}$ . Como  $\phi$  no es un campo libre la dependencia temporal de las componentes es complicada. La regla de cuantización usual  $[, ]_{PB} \rightarrow -i[, ]$  nos conduce a

$$[\phi(s, t), \Pi(s', t)] = i\delta(s - s') \quad (3.66)$$

Usando la descomposición en modos de Fourier, la regla de conmutación canónica da reglas de conmutación tipo oscilador armónico para los modos  $a_n, b_n$  pudiendo interpretarse como operadores de creación para  $n < 0$  y operadores de destrucción para  $n > 0$ . Cualquier observable clásico puede escribirse como una función de estos modos. El observable cuántico se define a partir del clásico imponiendo orden normal (todos los operadores de creación a la izquierda de los de destrucción). Se espera que esta forma de definir los operadores elimine todas las divergencias.

Debido al proceso de cuantización uno espera renormalización de los parámetros del lagrangiano. Por ello introduciremos un nuevo parámetro  $Q = \frac{1}{b} + O(1)$  que determinaremos imponiendo invariancia conforme. Este coeficiente aparece en la acción

$$I = \frac{1}{4\pi} \int d^2x (\partial_m \phi \partial^m \phi + Q \phi R(\hat{g}) + 4\mu e^{2b\phi}) \quad (3.67)$$

y el tensor energía momento se modifica

$$T_{+-} = 0 \quad (3.68)$$

$$T_{++} = \frac{1}{4} (4\pi \Pi + \phi)^2 - \frac{Q}{2} (4\pi \Pi + \phi)' + \frac{Q^2}{4} + \mu e^{2b\phi} \quad (3.69)$$

Ya que se cumple  $T_{+-} = 0$  uno esperaría invariancia conforme. Para que la invariancia conforme sea una realidad a nivel cuántico los modos de Fourier de  $T_{++}$  deben satisfacer un álgebra de Virasoro y conmutar con los modos de  $T_{--}$ . Todo esto se cumple solo si

$$Q = \frac{1}{b} + b \quad (3.70)$$

y la carga central del álgebra toma el valor

$$c = 1 + 6Q^2 \quad (3.71)$$

El conmutador  $[T_{++}(s, t), e^{p\phi(s', t)}]$  nos muestra que el operador  $e^{p\phi}$  es un campo primario con dimensión conforme

$$h_p = -\frac{p^2}{4} + \frac{pQ}{2} = -\frac{1}{4}(p - Q)^2 + \frac{c - 1}{24} \quad (3.72)$$

Estos resultados para la carga central y el peso conforme coinciden con sus valores clásicos en acoplo débil. Es curioso notar que los valores de ambas cantidades coinciden con los de un campo libre (con carga de fondo  $Q$ ). Pero, al contrario que para un campo libre, los operadores  $e^{p\phi}$  con  $p > Q$  no existen y las funciones de correlación no están sujetas a reglas de selección en la suma de exponentes.

En este momento vienen al caso dos comentarios

1. Al ser  $b$  real (ya que la métrica debe ser real) la carga central esta acotada por abajo  $c \geq 25$ . Para  $b = 1$  la carga central  $c = 25$  y la constante cosmológica es el operador inserción.
2. En una teoría conforme genérica el espectro de dimensiones conformes esta acotado por abajo. En este caso sin embargo  $h \leq Q^2/4$  y no es acotado por abajo.

Al igual que en el caso de la aproximación semiclassical, podemos fijar el área de la superficie  $A = \int e^{2b\phi}$  al calcular funciones de correlación. Usando el mismo argumento de escala se ve que la dependencia en el área de las funciones de correlación es  $A^{-1+X/2b}$  donde

$X = \sum_i p_i + Q(2g - 2)$ . Si  $X > 0$  la integral sobre el área es convergente y las funciones de correlación escalan como  $\mu^{-X/2b}$ . Para  $X \leq 0$  los correladores son divergentes en la región de área pequeña. El proceso de regularización produce también una dependencia analítica no universal en  $\mu$ . En el caso de que  $-X/2b$  sea un entero no negativo aparece un término extra  $\log \mu$  en la parte no analítica.

Veamos ahora como se comporta el espectro de la teoría. Como ya vimos, las reglas de cuantización se implementan de forma muy sencilla en esta teoría. De hecho, se podría decir que todo es igual que en un campo libre salvo el comportamiento de los modos cero, así que vamos a simplificar las cosas trabajando en la aproximación de mini-superspacio. Con esto hemos reducido el problema a mecánica cuántica ordinaria. El problema que tenemos que resolver es encontrar el espectro del sistema definido por la ecuación de Schrodinger

$$H\psi = \left(\frac{1}{4}p_0^2 + \frac{Q^2}{4} + \mu e^{2b\phi_0}\right)\psi = h\psi \quad (3.73)$$

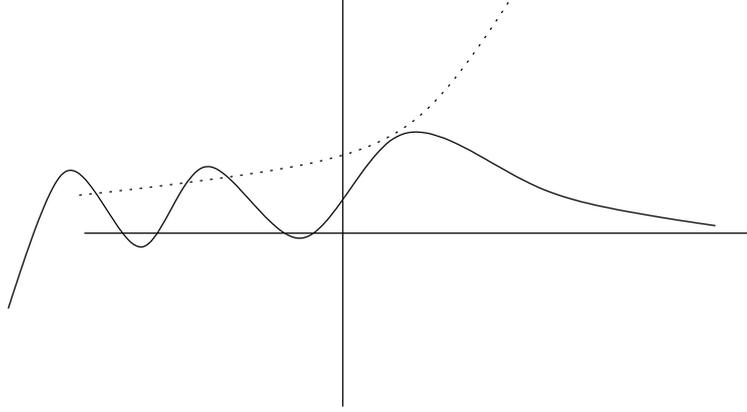
donde el momento conjugado de  $\phi_0$  es  $p_0 = -i\frac{\partial}{\partial\phi_0}$ .

Para este sistema la función de onda dependerá de un parámetro continuo  $p$ . Cuando  $\phi_0$  toma valores muy negativos el primer termino en el potencial  $V = \mu e^{2b\phi_0} + \frac{Q^2}{4}$  es pequeño y la función de onda  $\psi_p(\phi_0)$  es una combinación lineal de  $e^{\pm ip\phi_0}$ . Debido a que el potencial va a infinito para valores muy grandes de  $\phi_0$  tenemos un comportamiento  $\psi_p \sim \sin(p\phi_0)$  con energía  $h_p = \frac{p^2 + Q^2}{4}$  y los estados linealmente independientes tienen  $p > 0$ . En particular, no existe el estado con  $p = 0$ . Si incluimos los osciladores y recordamos que la teoría es invariante conforme, es posible justificar [59–63] que el espectro es

$$H = \oplus_p H_{h_p} \times H_{\bar{h}=h_p} \quad (3.74)$$

donde  $\oplus_p$  denota una integral sobre  $p > 0$  y  $H_h$  es la representación irreducible de Virasoro con peso conforme  $h = \frac{p^2 + Q^2}{4}$ . Ya que  $h - \frac{c}{24} = \frac{p^2}{4} - \frac{1}{24}$ , este espectro es consistente con el calculo semiclassical que presentamos anteriormente de la función de partición en el toro.

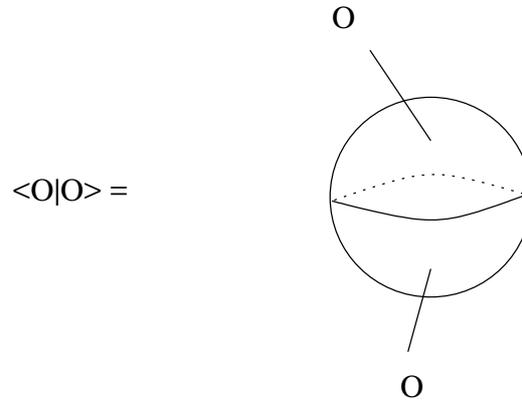
En las teorías conformes estándar existe una correspondencia entre estados y operadores locales, pero este no es el caso en la teoría de Liouville. En este caso el conjunto de



Función de onda normalizable en el mini-superespacio.

operadores primarios es  $e^{p\phi}$  con peso conforme  $h = -\frac{1}{4}(p - Q)^2 + \frac{Q^2}{4}$ , y el conjunto de estados es diferente.

El mapa estándar que relaciona un operador  $O$  con un estado  $O(0)|0\rangle$  no puede usarse aquí ya que el vacío  $SL(2, C)$  invariante  $|0\rangle$  no pertenece al espacio de Hilbert  $H$ . De forma alternativa uno podría construir el estado correspondiente a  $O$  calculado la integral funcional en el disco con una inserción de  $O$  en el centro. Esta construcción corresponde con las ideas en [64] acerca de la función de onda del universo. En la aproximación de mini-superespacio la función de onda correspondiente a  $O = e^{p\phi}$  se comporta para  $\phi_0$  muy negativo como  $\psi_O(\phi_0) = e^{(p-Q)\phi_0}$ . Esta función de onda diverge en la región profundamente negativa y no es normalizable. La norma del estado puede calcularse pegando dos discos a lo largo de sus fronteras. Como ya discutimos, la función de correlación sobre la esfera así definida es divergente para áreas pequeñas. Por tanto, la función de onda definida por la inserción de un operador en el disco es no normalizable. Estas funciones de onda no normalizables pueden regularizarse poniendo un límite en los valores de  $\phi_0$ . En el proceso de eliminar el regulador, uno puede mantener la norma finita y mandar la función de onda a cero para cualquier valor finito de  $\phi_0$  o bien mantener la función de onda diferente de cero y dejar que la norma sea divergente.



Normalización como correlador a dos puntos

Pensando en las similitudes con [64](allí la construcción corresponde a  $O$  el operador identidad y el estado resultante es el vacío invariante  $SL(2, C)$ ) podemos pensar que estos estados no normalizables viven en un espacio de Hilbert  $H_{HH}$  aunque no estén en el espacio de Hilbert ordinario. La integral funcional sobre una superficie de Riemann con una frontera nos da un estado. Para una superficie de genus  $g$  e inserciones de operadores  $e^{p_i \phi}$  el estado es normalizable (en el espacio de Hilbert ordinario) si  $X = \sum_i p_i + Q(2g - 2) > 0$  y no normalizable (pero en  $H_{HH}$ ) cuando  $X \leq 0$ .

Con esto ya entendemos porque el mapa usual entre operadores y estados no puede aplicarse en la teoría de Liouville. Veamos ahora que es lo que ocurre con el mapa estados-operadores. Para insertar un estado en una teoría conforme usual, el procedimiento consiste en hacer un pequeño agujero en la superficie y calcular la integral funcional con las condiciones de frontera  $\phi(s)$  en el agujero. Después hay que integrar sobre los valores de frontera  $\phi(s)$  con un peso dado por la función de onda del estado que queramos insertar  $\psi[\phi(s)]$ . Este proceso puede realizarse para agujeros arbitrariamente pequeños, con lo que corresponde a un operador local. En la teoría de Liouville esto es diferente ya que  $g = e^{2b\phi} \hat{g}$  es la métrica física de la superficie. Un operador local debe ser local con respecto a  $g$  y no solo con respecto a  $\hat{g}$ . Por tanto, para un operador local, la función de onda debe estar muy

localizada en valores muy negativos de  $\phi$  y por tanto no sera normalizable.

Si examinamos de forma mas cuidadosa el problema mecano-cuántico (3.73) se puede entender mejor la diferencia entre los estados en el espacio de Hilbert ordinario (normalizable) y los estados en el espacio de Hilbert de Hartle-Hawking (no normalizables). Los operadores locales nos dan autofunciones del hamiltoniano que divergen cuando  $\phi_0$  va a la región profundamente negativa. Su momento  $p$  es imaginario y por tanto su peso conforme es menor que  $Q^2/4$ . Los estados normalizables tiene momento real y por tanto peso conforme mayor que  $Q^2/4$ . El hecho de que el operador local  $e^{p\phi}$  tiene  $p < Q$  tiene una interpretación muy simple desde este punto de vista. La función de onda asociada con el operador  $e^{p\phi}$  se comporta como  $e^{(p-Q)\phi_0}$  para valores muy negativos de  $\phi_0$ . Crece en esta región solo para  $p < Q$ . El operador inserción con  $h = Q^2/4$  tiene momento cero. las dos autofunciones independientes del hamiltoniano son la constante y la lineal. La lineal crece en el infinito por lo que da lugar a un operador local. Por tanto, el operador inserción es  $\phi e^{Q\phi}$ . Es fácil ver que este operador es un primario del álgebra de Virasoro con la dimensión correcta. A diferencia de otros primarios el operador inserción no es una exponencial de  $\phi$ , por lo que correladores que involucren  $\phi e^{Q\phi}$  no vienen dadas por potencias de  $\mu$ . Esto es particularmente importante en el caso  $b = 1$  donde el operador inserción es la constante cosmológica y aparece en la acción. En es caso la dependencia de las funciones de correlación con  $\mu$  es mas complicada [65]. En esta memoria trabajaremos siempre con teorías tales que el campo de Liouville siempre tendrá una carga central  $c > 25$  por lo que no nos preocuparemos de esta sutileza.

El cálculo semiclásico de función de partición en el toro describe la traza sobre el espacio de Hilbert en esta aproximación. Ya que el espectro en el espacio de Hilbert es continuo, los estados estarán normalizados con una función delta y por tanto, es natural que la integral sobre el área de la superficie presente una divergencia logarítmica.

Antes vimos que la función a dos puntos no esta bien definida debido a una divergencia. Esta divergencia esta relacionada con que estamos calculando productos de operadores

que están en  $H_{HH}$ , que no es un espacio de Hilbert ordinario. La divergencia para áreas pequeñas es un reflejo del mal comportamiento que presentan los estados de dicho espacio cuando nos encontramos en la zona profundamente negativa de  $\phi$ . La definición de la integral divergente como una función delta no es mas que un intento de garantizar que estados con momento (imaginario) diferente sean ortogonales. La norma infinita de dichos estados viene de la integral sobre el grupo  $D$  que definimos antes y no de la integral sobre las áreas (que diverge como una potencia).

Es natural llamar a estos dos tipos de estados macroscópicos y microscópicos. Los estados macroscópicos tiene función de onda normalizable y corresponden a operadores no locales. Los operadores microscópicos están asociados a operadores locales y sus funciones de onda son no normalizables.

Esta distinción entre estados microscópicos, correspondientes a operadores locales, y estados macroscópicos se sigue simplemente de que métrica es una variable dinámica y por tanto un argumento de la función de onda. Debido a lo general del argumento, es de esperar que cualquier teoría que pretenda cuantizar la gravedad presente esta peculiaridad.

Como la estructura del espacio de estados es bastante complicada, las reglas de factorización para los correladores serán también diferentes a las de una teoría conforme genérica. Funciones de correlación de operadores locales corresponderán a la inserción de estados microscópicos en las líneas externas, pero en principio no esta claro que estados se propagaran en las líneas internas. Ya que la superficie descrita por la métrica  $g$  tiene un tamaño finito, podemos esperar que en las líneas internas nos encontremos estados macroscópicos. La monodromía  $SL(2, R)$  de las soluciones clásicas puede ser elíptica, parabólica, o hiperbólica a lo largo de líneas diferentes. Dicha monodromía determina el tipo de estado que se esta propagando, que puede ser tanto macroscópico como microscópico.

## 3.2. Estados de Frontera en la Teoría de Liouville

En esta sección consideraremos en mas detalle los estados que antes llamamos macroscópicos. Estos estados no corresponden a inserciones de operadores locales y clásicamente están relacionados con las soluciones de tipo hiperbólico. Empezaremos con una discusión de los posibles estados singulares en la teoría para después atacar el problema de la función de correlación en el disco con una inserción. Con este cálculo veremos que se puede definir un nuevo estado (de frontera) que llamaremos FZZT. Para terminar discutiremos un nuevo tipo de estado de frontera, y que llamaremos estado ZZ.

### 3.2.1. Primarios Singulares en Liouville

Los objetos básicos en la teoría de liouville son los operadores exponenciales

$$V_a = e^{a\phi} \quad (3.75)$$

que son primarios conformes respecto al tensor energía-momento de la teoría

$$T(z) = -(\partial\phi)^2 + Q\partial^2\phi \quad (3.76)$$

$$\bar{T}(z) = -(\bar{\partial}\phi)^2 + Q\bar{\partial}^2\phi \quad (3.77)$$

con peso conforme

$$h_a = -\frac{a^2}{4} + \frac{aQ}{2} \quad (3.78)$$

Todos estos estados no son independientes ya que la fórmula para el peso conforme tiene la simetría

$$a \rightarrow 2Q - a \quad (3.79)$$

lo que nos lleva a identificar  $V_a$  y  $V_{2Q-a}$ . Puede verse que los operadores  $V_a$  que quedan invariantes bajo esta simetría -aquellos con  $a = ip + Q$  con  $p$  real- corresponden en el límite clásico a soluciones hiperbólicas, por lo que no corresponden a inserciones de operadores

locales y podemos identificarlos con nuestros estados normalizables (estados macroscópicos). Por tanto, el espacio de estados normalizables de la teoría de Liouville corresponde a los primarios  $|v_p\rangle$  con  $p$  real  $0 \leq p < \infty$ . Estos estados  $|v_p\rangle$  están relacionados con los valores  $a = ip + Q$  y tiene peso conforme

$$\frac{p^2 + Q^2}{4} \quad (3.80)$$

Cualquier otro valor de  $a$  corresponde a estados no normalizables. Normalizaremos estos estados según una función delta

$$\langle v_p | v_{p'} \rangle = 2\pi\delta(p - p') \quad (3.81)$$

La solución de la teoría de Liouville en la esfera consiste en construir todas las funciones de correlación

$$G_{a_1 \dots a_N}(x_1 \dots x_N) = \langle V_{a_1}(x_1) \dots V_{a_N}(x_N) \rangle \quad (3.82)$$

En principio estos operadores están determinados completamente por la estructura del álgebra de OPEs (expansión del producto de operadores). Esto significa que cualquier función de correlación a  $N$  puntos puede construirse utilizando la función a dos puntos

$$\langle V_a(x)V_a(0) \rangle = \frac{D(a)}{(x\bar{x})^{2h_a}} \quad (3.83)$$

que determina la normalización de los operadores, y la función a tres puntos

$$G_{a_1, a_2, a_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{C(a_1, a_2, a_3)}{|x_{12}|^{h_3 - h_1 - h_2} |x_{23}|^{h_1 - h_2 - h_3} |x_{31}|^{h_2 - h_1 - h_3}} \quad (3.84)$$

Si estos objetos son conocidos, en principio cualquier correlador puede construirse utilizando únicamente la simetría conforme.

Para construir estos correladores a dos y tres puntos [8], resulta útil considerar las representaciones singulares del álgebra de Virasoro en esta teoría. Puede verse que los estados primarios que generan representaciones singulares del álgebra de Virasoro tienen

$$a = \frac{1}{b}(1 - m) + b(1 - n) \quad (3.85)$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros. Dichas representaciones (para  $b$  genérico) tiene exactamente un vector singular en el nivel  $mn$ . El carácter de Virasoro para dichas representaciones viene dado por

$$\chi_{m,n}(q) = \frac{q^{h_{m,n}-(c-1)/24}}{\eta(q)}(1 - q^{mn}) \quad (3.86)$$

Consideremos la representación singular con  $a = -b$ . Como en el caso que los modelos minimales que estudiamos en el segundo capítulo de esta memoria, los productos que involucran este operador singular sufren truncaciones. Puede verse que

$$V_{-b}V_a = C_+[V_{a-b}] + C_-[V_{a+b}] \quad (3.87)$$

donde  $C_{\pm}$  son ciertas constantes de estructura. También puede verse que estas constantes de estructura pueden calcularse en cierto sentido perturbativo (en términos de integrales de apantallamiento). En el primer término el momento se conserva y para calcularlo no necesitamos insertar ningún operador de apantallamiento por lo que podemos fijar  $C_+ = 1$ . El segundo término necesita la inserción de un vértice de interacción  $-\frac{\mu}{\pi} \int e^{2b\phi}$

$$\begin{aligned} C_- &= -\frac{\mu}{\pi} \int d^2x \langle V_a(0)V_{-b}(1)e^{2b\phi(x)}V_{2Q-a-b}(\infty) \rangle = \\ &= -\mu \frac{\gamma(ab - 1 - b^2)}{\gamma(-b^2)\gamma(ab)} \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde  $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$ .

Para calcular el coeficiente  $D(a)$  de la función a dos puntos vamos a considerar una función auxiliar a tres puntos

$$\langle V_a(x_1)V_{a+b}(x_2)V_{-b}(z) \rangle \quad (3.89)$$

Cuando  $z$  esta muy cerca de  $x_1$  se ve que solo el segundo término de la expansión en producto de operadores sobrevive y tenemos

$$\langle V_a(x_1)V_{a+b}(x_2)V_{-b}(z) \rangle \sim C_-D(a+b) \quad (3.90)$$

Por otro lado, cuando  $z$  esta muy cerca de  $x_2$  tenemos por el mismo motivo

$$\langle V_a(x_1)V_{a+b}(x_2)V_{-b}(z) \rangle \sim C_+D(a) \quad (3.91)$$

Si igualamos ambas expresiones tenemos una ecuación funcional para el coeficiente

$$\frac{D(a+b)}{D(a)} = \frac{1}{C_-(a)} \quad (3.92)$$

que tiene por solución

$$D(a) = (\mu\gamma(b^2))^{(Q-a)/b} \frac{\gamma(ab - b^2)}{b^2\gamma(2 - a/b + 1/b^2)} \quad (3.93)$$

Es importante pensar un poco en la dualidad  $b \leftrightarrow 1/b$  que presenta la teoría. El operador  $V_{-b}$  es dual al operador  $V_{-1/b}$ . Usando este operador tendríamos una ecuación funcional dual para el coeficiente  $D(a)$  con  $b$  intercambiado por  $1/b$ . Ambas ecuaciones resultan compatibles si reemplazamos la constante cosmológica  $\mu$  por una constante cosmológica dual  $\hat{\mu}$  relacionada con  $\mu$  mediante

$$\hat{\mu}\gamma(1/b^2) = (\mu\gamma(b^2))^{1/b^2} \quad (3.94)$$

Con esta definición de  $\hat{\mu}$ , que estaría asociada a un término de interacción de la acción  $\frac{\hat{\mu}}{\pi} \int e^{-2\phi/b}$ , restauraríamos la invariancia de todos los observables respecto a  $b \rightarrow 1/b$  y  $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ .

Con métodos similares puede calcularse la función a tres puntos [10].

### 3.2.2. Teoría de Liouville en el Disco: FZZT brana

Para poder introducir unas condiciones de frontera invariantes conformes (y de tipo Newmann) para la teoría de Liouville en el disco necesitamos encender una interacción de frontera

$$I_{\partial} = \frac{1}{2\pi} \int ds(Qk\phi + 2\mu_B e^{b\phi}) \quad (3.95)$$

donde  $s$  es la coordenada en la frontera del disco,  $k$  es la curvatura en la frontera y estamos suponiendo métrica plana en el interior del disco. Si trabajamos con coordenadas tales que el disco corresponde con el semiplano complejo superior, entonces podemos identificar la frontera con el eje real. Llamaremos a la constante  $\mu_B$  constante cosmológica de frontera.

Añadiendo este término a la acción original encontramos una familia uniparamétrica de teorías conformes parametrizadas por  $\mu_B$ . En el caso sin frontera la constante cosmológica no era mas que un parámetro de escala ya que las funciones de correlación tenían una dependencia

$$\mu^X F(\text{moduli}) \quad (3.96)$$

donde  $X$  era un número, en general fraccionario. En el caso con frontera esto no es si y los correladores pueden depender del parámetro adimensional  $\mu/\mu_B^2$

$$G \sim \mu^X F(\text{moduli}, \frac{\mu_B^2}{\mu}) \quad (3.97)$$

Vamos a considerar la función de correlación el disco con un operador insertado

$$\langle V_a(z) \rangle_{\mu_B} = \frac{U(a, \mu_B)}{|z - \bar{z}|^{2h_a}} \quad (3.98)$$

Para calcular esto vamos a usar el mismo truco que en el caso de la función a dos puntos en la esfera y estudiar

$$\langle V_a(x)V_{-b}(z) \rangle_{\mu_B} \quad (3.99)$$

en el caso en que  $z$  esta muy cerca de  $x$ , como tenemos un operador singular insertado, podemos escribir

$$\langle V_a(x)V_{-b}(z) \rangle_{\mu_B} = C_+(a)U(a-b)G_+(x, z) + C_-(a)U(a+b)G_-(x, z) \quad (3.100)$$

donde

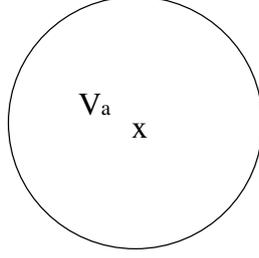
$$G_{\pm}(x, z) = \frac{|x - \bar{x}|^{2h_a - 2h_{-b}}}{|z - \bar{z}|^{4h_a}} F_{\pm}(\eta) \quad (3.101)$$

y  $F_{\pm}$  son ciertas funciones de

$$\eta = \frac{(z-x)(\bar{z}-\bar{x})}{(z-\bar{x})(\bar{z}-x)} \quad (3.102)$$

Cuando ambos operadores se acercan a la frontera podemos expandirlos en términos de operadores de frontera

$$B_w(s) = e^{w\phi(s)} \quad (3.103)$$



Correlador a 1 punto con interacción de frontera. Condiciones tipo Newmann para el modo de Liouville.

Cerca de la frontera el operador degenerado  $V_{-b}$  solo nos da dos familias de operadores de frontera  $B_0$  y  $B_{-b}$ . Para completar este cálculo necesitamos conocer la integral de apantallamiento

$$-\frac{\mu_B}{\pi} \int ds \langle V_{-b}(i)B_b(s)B_Q(\infty) \rangle = -\frac{2\mu_B\Gamma(-1-2b^2)}{\Gamma(-b^2)^2} \quad (3.104)$$

Usando estos resultados tenemos una ecuación funcional

$$-\frac{2\mu_B}{\Gamma(-b^2)}U(a) = \frac{\Gamma(-b^2+ab)}{\Gamma(-1-2b^2+ab)}U(a-b) - \frac{\mu\Gamma(-1-b^2+ab)}{\gamma(-b^2)\Gamma(ab)}U(a+b) \quad (3.105)$$

que tiene como solución

$$U(a) = \frac{2}{b}(\mu\gamma(b^2))^{(Q-a)/2b}\Gamma(ab-b^2)\Gamma\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b^2}-1\right)\cosh(a-Q)\pi\sigma \quad (3.106)$$

donde el parámetro  $\sigma$  esta relacionado con el valor de la razón entre constantes cosmológicas

$$\cosh^2 \pi b \sigma = \frac{\mu_B^2}{\pi\mu} \sin \pi b^2 \quad (3.107)$$

Esta expresión satisface la dualidad  $b \rightarrow 1/b$  si cambiamos la constante cosmológica por su dual, el parámetro  $s$  se mantiene invariante y definimos la constante cosmológica de frontera dual mediante

$$\cosh^2 \frac{\pi\sigma}{b} = \frac{\hat{\mu}_B^2}{\pi\hat{\mu}} \sin \frac{\pi}{b^2} \quad (3.108)$$

Es curioso también ver que se satisface la relación

$$U(a) = U(2Q-a)D(a) \quad (3.109)$$

con la función a dos puntos en la esfera. Cuando  $a$  corresponde a un estado físico,  $a = ip + Q$  con  $p$  real, la expresión para  $U(a)$  nos queda

$$U_p = 2(\mu\gamma(b^2))^{-ip/2b}\Gamma(1 + ibp)\Gamma(1 + ip/b)\frac{\cos(\pi p\sigma)}{ip} \quad (3.110)$$

esta cantidad puede interpretarse como un elemento de matriz entre un estado físico primario  $|v_p\rangle$  y un estado de frontera  $\langle B_\sigma|$

$$U_p = \langle B_\sigma | v_p \rangle \quad (3.111)$$

A este estado de frontera lo asociaremos con una brana en la teoría de Liouville que llamaremos FZZT.

### Propiedades Semiclásicas de la FZZT brana

Consideremos el límite semiclásico ( $b$  cercano a cero) para la expresión anterior con  $p$  del mismo orden que  $b$ , y  $s$  del orden de  $1/b$ . En este límite esperamos que la aproximación de mini-superspacio sea válida. Vamos a pensar en la geometría de un cilindro semi-infinito de radio unidad y consideremos estados en el círculo. En la aproximación de mini-superspacio uno tiene en cuenta solamente la dinámica del modo cero

$$\phi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \phi(x) \quad (3.112)$$

despreciando los términos correspondientes a osciladores en el campo  $\phi$ . En este límite el estado  $|v_p\rangle$  puede describirse mediante una función de onda que satisface la ecuación de Schroedinger

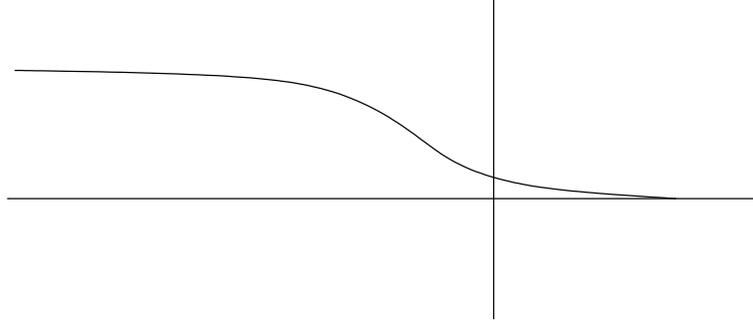
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + 4\mu e^{2b\phi_0}\right)\psi_p(\phi_0) = p^2\psi_p(\phi_0) \quad (3.113)$$

que tiene una solución que puede expresarse en términos de funciones de Bessel modificadas

$$\psi_p(\phi_0) = \frac{2(\mu/b^2)^{-ip/2b}}{\Gamma(-ip/b)} K_{ip/b}(2\sqrt{\mu/b^2}e^{b\phi_0}) \quad (3.114)$$

que, cuando  $\phi$  esta en la zona profundamente negativa, tiene el comportamiento asintótico

$$\psi_p(\phi_0) = e^{ip\phi_0} + S_p e^{-ip\phi_0} \quad (3.115)$$



Función de onda de la brana FZZT en el mini-superspacio

donde

$$S_p = -(\mu\gamma(b^2))^{-ip/b} \frac{\Gamma(1+ip/b)\Gamma(1+ipb)}{\Gamma(1-ip/b)\Gamma(1-ipb)} \quad (3.116)$$

También se cumple la normalización

$$\int \psi_{p'}^\dagger \psi_p = 2\pi\delta(p-p') \quad (3.117)$$

Para encontrar la función de onda en el minisuperspacio asociada al estado de frontera tenemos que considerar

$$\psi_{B_\sigma} = \int_{\text{disco}} D\phi e^{-\frac{1}{4\pi} \int (\partial\phi)^2 - \frac{\mu}{\pi} \int e^{2b\phi} - \frac{\mu_B}{\pi} \int_{\partial} e^{b\phi}} \quad (3.118)$$

con condiciones de frontera de tipo FZZT en el borde del disco suponiendo que  $\phi = \phi_0$  independiente e la coordenada espacial. Con esta definición se ve que  $\psi_{B_\sigma}$  debe satisfacer una ecuación de tipo Schroedinger

$$\left( \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial\phi_0^2} + \frac{\mu}{\pi} e^{2b\phi_0} + \frac{\mu_B}{\pi} e^{b\phi_0} \right) \psi_{B_\sigma} = 0 \quad (3.119)$$

Para resolver esta ecuación en el límite clásico  $b \rightarrow 0$  vamos a proponer el ansatz

$$\psi_{B_\sigma} = e^{-\alpha e^{b\phi_0}} \quad (3.120)$$

que al introducirlo en la ecuación nos da la condición

$$\alpha = 2\mu_B/b^2 \quad (3.121)$$

Para tener una función de onda bien definida en el límite clásico necesitamos renormalizar la constante cosmológica de frontera  $\mu_B/b^2 \rightarrow \mu_B$ . Con esta renormalización también se ve que  $\mu$  es despreciable con respecto a  $\mu_B$  en el límite  $b \rightarrow 0$ , con lo que finalmente llegamos a la función de onda

$$\psi_{B_\sigma} = e^{-2\mu_B e^{b\phi}} \quad (3.122)$$

para el estado de frontera en el límite clásico.

Usando todos estos ingredientes podemos calcular el elemento de matriz

$$\langle B_\sigma | v_p \rangle = \int \psi_{B_\sigma} \psi_p = \frac{2}{ip} (\mu\gamma(b^2))^{-ip/2b} \Gamma(ip/b) \cos(\pi p\sigma) \quad (3.123)$$

que coincide con el elemento de matriz antes calculado en el límite en el que estamos trabajando.

### 3.2.3. Condiciones Dirichlet para $\phi$ : La ZZ brana

En la sección anterior consideramos la teoría de Liouville definida en un espacio con frontera (el disco) y condiciones de frontera tipo Neumann para el campo de Liouville. Con estas condiciones fuimos capaces de encontrar un estado de frontera que dependía de la constante cosmológica en la frontera y que pudimos asociar a un tipo de brana, la FZZT brana. Es interesante considerar si es posible encontrar soluciones tales que las condiciones de frontera para el campo  $\phi$  sean de tipo Dirichlet. Esto no es tan sencillo como en el caso de una teoría conforme genérica, ya que al estar relacionado el campo de Liouville con la métrica de la hoja de mundo de la forma  $g = e^{2b\phi} \delta$  encontramos que la condición  $\phi = \text{constante}$  solo resulta invariante conforme en el caso en el que  $\phi$  sea  $-\infty$  o bien  $+\infty$ . El primer caso no resulta muy interesante ya que en ese punto la frontera tendría tamaño nulo, y correspondería por lo tanto a una inserción. El caso en el que  $\phi \sim +\infty$  la frontera tiene un tamaño infinito y por tanto corresponderá a algo nuevo. Existe un espacio con frontera que presenta un comportamiento similar: el disco de Poincare o pseudoesfera. Este

espacio tiene la métrica

$$ds^2 = e^{2b\phi}|dz|^2 = \frac{4R^2}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2 \quad (3.124)$$

donde  $R$  es el radio de la pseudoesfera. Este espacio presenta una frontera en  $|z| = 1$  que medida con esta métrica tiene una longitud infinita. En términos de las cantidades de la teoría de Liouville el radio se escribe como  $R^2 = \frac{Q}{4\mu b}$ .

Por tanto, estudiar la teoría con condiciones de contorno de tipo Dirichlet es equivalente a estudiar la cuantización de la teoría de Liouville definida sobre este espacio. Lo que encontraremos será un número infinito de soluciones parametrizadas por números enteros  $(m, n)$  que se podrán poner en correspondencia con las representaciones degeneradas del álgebra de Virasoro.

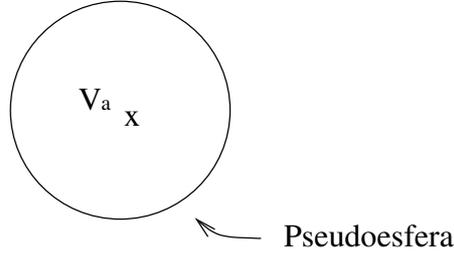
Lo único que asumiremos en lo que sigue es que el estado saliente creado por el disco de Poincare el invariante conforme, es decir, que consiste en una superposición de estados  $|v_p\rangle$ . Por tanto las funciones de correlación a un punto no serán mas que los elementos de matriz del estado insertado con el vacío saliente correspondiente a la pseudoesfera, o en otras palabras, lo mas parecido el la teoría de Liouville a la amplitud del disco con un operador insertado y condiciones de contorno de tipo Dirichlet en la frontera. En esta sección utilizaremos coordenadas para el disco de Poincare tales que la métrica se escribe de la forma

$$ds^2 = \frac{R^2}{Imz} \quad (3.125)$$

donde  $z$  esta definida en el semiplano superior y la frontera se encuentra en el eje real. La simetría conforme nos dicta que la dependencia de cualquier función de correlación viene determinada por el peso conforme de la inserción

$$\langle V_a(z) \rangle_{dp} = \frac{U(a)}{|z - \bar{z}|^{2h_a}} \quad (3.126)$$

La normalización vamos a fijarla de la forma usual  $U(0) = 1$ . Las propiedades locales de la teoría no se ven afectadas por las condiciones de frontera. En concreto, las representaciones



Correlador a 1 punto en la pseudoesfera. Condiciones Dirichlet para el modo de Liouville.

singulares continúan existiendo. Por tanto los operadores  $e^{a\phi}$  con

$$a = (1 - m)/b + (1 - n)b \quad (3.127)$$

existen para  $m$  y  $n$  enteros positivos. Por tanto, podemos usar el mismo truco de las secciones anteriores para estudiar estas funciones a un punto. Vamos a considerar el correlador

$$\langle V_{-b}(z)V_a(z') \rangle_{dp} \quad (3.128)$$

Como ya sabemos, los operadores singulares restringen de forma muy especial a los correladores en los que se ven involucrados. En particular para el caso que nos ocupa tenemos

$$V_{-b}V_a \sim V_{a-b} + V_{a+b} \quad (3.129)$$

Si hacemos un cálculo similar al de los apartados anteriores (ver [13] para los detalles) encontramos una ecuación funcional para  $U(a)$

$$\frac{\Gamma(-b^2)U(a)U(-b)}{\Gamma(-1 - 2b^2)\Gamma(ab - b^2)} = \frac{U(a - b)}{\Gamma(ab - 2b^2 - 1)} - \frac{\mu\Gamma(1 + b^2)U(a + b)}{(ab - b^2 - 1)\Gamma(-b^2)\Gamma(ab)} \quad (3.130)$$

Esta ecuación admite muchas soluciones, pero el número de estas se ve muy reducido debido a que también debe de cumplirse la ecuación dual en la que  $b$  se cambia por  $1/b$  y  $\mu$  se cambia por  $\hat{\mu}$  donde

$$\hat{\mu}\gamma(1/b^2) = (\mu\gamma(b^2))^{1/b^2} \quad (3.131)$$

Puede verse que todas las soluciones de dicha ecuación funcional pueden expresarse en términos de la familia parametrizada por los enteros positivos  $m$  y  $n$

$$U_{m,n}(a) = \frac{\sin(\pi Q/b) \sin(\pi m(a - Q)/b) \sin(\pi Qb) \sin(\pi n(a - Q)b)}{\sin(\pi mQ/b) \sin(\pi(a - Q)/b) \sin(\pi nQb) \sin(\pi(a - Q)b)} U_{1,1}(a) \quad (3.132)$$

donde la función (1, 1)

$$U_{1,1}(a) = \frac{(\mu\gamma(b^2))^{-a/2b}\Gamma(bQ)\Gamma(Q/b)Q}{\Gamma(b(Q-a))\Gamma((Q-a)/b)(Q-a)} \quad (3.133)$$

Llamaremos a la solución de tipo (1,1) brana ZZ fundamental.

Cuando  $a = ip + Q$  podemos interpretar

$$\langle V_{ip+Q} \rangle_{dp} = \langle ZZ(m, n) | v_p \rangle \quad (3.134)$$

donde  $|ZZ(m, n) \rangle$  es el estado de frontera correspondiente a la presencia de una brana ZZ de tipo  $(m, n)$ .

Con esto terminamos la caracterización de los diferentes tipos de branas que aparecen en la teoría de Liouville pura. En la siguiente sección estudiaremos que es lo que ocurre cuando acoplamos materia minimal a la gravedad en dos dimensiones.

### 3.3. Acoplo a Materia

Para describir la teoría de Liouville acoplada a materia, y de paso justificar porque esto es una gravedad cuántica en dos dimensiones, vamos a considerar la función de partición

$$Z = \int \frac{Dg D(mat)}{diff} e^{-S_m - \mu_0 \int \sqrt{g}} \quad (3.135)$$

donde  $S_m$  es la acción de una teoría conforme acoplada a la métrica  $g$  de una superficie de Riemann  $M$ .

Las medidas  $Dg$  y  $D(mat)$  son invariantes bajo difeomorfismos de  $M$  pero no frente a transformaciones de Weyl  $g \rightarrow e^k g$ . La medida asociada a materia cambia como [52]

$$D_{e^k g}(mat) = e^{\frac{c}{48\pi} I_l(k)} D_g(mat) \quad (3.136)$$

donde

$$I_l(k) = \int \sqrt{g} (g^{mn} \partial_m k \partial_n k + Rk + \mu e^k) \quad (3.137)$$

Antes de considerar la transformación de  $Dg$  bajo estas transformaciones, debemos fijar la simetría bajo difeomorfismos. Para esto usaremos el método estándar de Faddeev-Popov. Fijaremos el gauge

$$g = e^p \hat{g}(t) \quad (3.138)$$

con  $t$  los parámetros de estructura compleja de  $M$ . Parametrizamos las variaciones en la métrica por

$$\delta g_{zz} = \partial_z \zeta \quad \delta g_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \bar{\zeta} \quad (3.139)$$

donde hemos fijado coordenadas complejas. Notar que el modo  $g_{z\bar{z}}$  se parametriza por  $e^p$ . Por tanto, la medida completa cambia

$$Dg = Dg_{zz} Dg_{\bar{z}\bar{z}} Dg_{z\bar{z}} \rightarrow (dt) \det(\partial_z) \det(\partial_{\bar{z}}) D\zeta D\bar{\zeta} Dp \quad (3.140)$$

donde podemos escribir los determinantes como

$$\det(\partial) \det(\bar{\partial}) = \int D(gh) e^{-S_{gh}} \quad (3.141)$$

en términos de los campos de fantasmas. La medida de los fantasmas tampoco es invariante bajo transformaciones de Weyl. Cambia como

$$D_{e^k g}(gh) = e^{-\frac{26}{48\pi} I_1(k)} D_g(gh) \quad (3.142)$$

Usando todo esto podemos escribir la función de partición como

$$Z = \int (dt) D_g p D_g(gh) D_g(mat) e^{-S_m - S_{gh} - \mu_0 \int \sqrt{g}} \quad (3.143)$$

ahora fijemos  $g = e^p \hat{g}$  con lo que la medida cambia con un jacobiano

$$D_{e^p \hat{g}} p D_{e^p \hat{g}}(gh) D_{e^p \hat{g}}(mat) = J(p, \hat{g}) D_{\hat{g}} p D_{\hat{g}}(gh) D_{\hat{g}}(mat) \quad (3.144)$$

La contribución al jacobiano de la materia y los fantasmas es trivial de calcular con lo que ya sabemos. La contribución de  $p$  es complicada, pero puede asumirse que la contribución tomará la forma

$$\int \sqrt{\hat{g}} (u \hat{g}^{mn} \partial_m p \partial_n p + v \hat{R} p + \mu e^{wp}) \quad (3.145)$$

donde  $u, v, w$  serán constantes que determinaremos imponiendo invariancia conforme. Con esta suposición podemos escribir

$$Z = \int (dt) Dp D(gh) D(mat) e^{-S_m + S_{gh} - \int \sqrt{\hat{g}} (u \hat{g}^{mn} \partial_m p \partial_n p + v \hat{R} p + \mu e^{wp})} \quad (3.146)$$

donde ahora la medida de  $p$  es la de un campo libre.  $Z$  debe ser invariante bajo difeomorfismos y depender solamente de  $g = e^p \hat{g}$  y no de  $\hat{g}$ . Esto implica que  $Z$  debe ser invariante bajo

$$\delta \hat{g} = e \hat{g} \quad \delta p = -e \quad (3.147)$$

esto impone las condiciones sobre los coeficientes

$$0 = v + \frac{c - 26 + 1}{48\pi} \quad 0 = 2u - v \quad (3.148)$$

lo que nos determina

$$v = \frac{25 - c}{48\pi} \quad u = v/2 \quad (3.149)$$

Si sustituimos estos valores en el exponente de la función de partición y definimos

$$p \sqrt{\frac{25 - c}{24}} = \phi \quad w \sqrt{\frac{24}{25 - c}} = 2b \quad (3.150)$$

nos encontramos con la acción de Liouville

$$\frac{1}{4\pi} \int \sqrt{\hat{g}} (\hat{g}^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + Q \hat{R} \phi + \mu e^{2b\phi}) \quad (3.151)$$

donde  $Q = \sqrt{(25 - c)/6}$ . Para determinar  $b$  tenemos que imponer que  $e^{2b\phi} \hat{g}$  sea la métrica de la superficie, que no es mas que imponer que  $e^{2b\phi}$  sea un operador de peso conforme unidad. El peso de dicho operador viene dado por  $h = b(Q - b)$ , lo que fija  $Q = b + 1/b$  y por tanto

$$b = \frac{1}{\sqrt{24}} (\sqrt{25 - c} - \sqrt{1 - c}) \quad (3.152)$$

Una de las cantidades físicas relevantes en estas teorías de gravedad cuántica con materia es un exponente crítico llamado susceptibilidad. Para definir dicho exponente necesitamos considerar la función de partición a área fija

$$Z(A) = \int D\phi DX e^{-S} \delta(A - \int e^{2b\phi}) \quad (3.153)$$

donde  $X$  representa al resto de campos de la teoría (materia y fantasmas). La susceptibilidad  $\gamma$  se define por la dependencia en el área de  $Z(A)$  para  $A$  muy grande

$$Z(A) \sim A^{(\gamma-2)\chi/2-1} \quad (3.154)$$

Con este formalismo  $\gamma$  puede determinarse usando un argumento de escala. Vamos a considerar la traslación  $\phi \rightarrow \phi + k/2b$  con  $k$  constante. La medida no cambia bajo esta transformación y la acción cambia solo en el término de curvatura como

$$\delta\left(\frac{Q}{4\pi} \int \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \phi\right) = \frac{Qk}{8\pi b} \int \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \quad (3.155)$$

por lo que podemos deducir que

$$Z(A) = e^{-Qk\chi/2b-k} Z(e^{-k}A) \quad (3.156)$$

con lo que fijando  $e^k = A$  encontramos

$$Z(A) = A^{-Q\chi/2b-1} Z(1) \quad (3.157)$$

con lo que  $\gamma = 2 - Q/b$ . Notar que para los modelos minimales de tipo  $(p, q)$  encontramos

$$\gamma = \frac{-2}{p+q-1} \quad (3.158)$$

En el siguiente capítulo veremos como podemos reproducir estos resultados utilizando una aproximación discreta de la superficie.

### 3.3.1. Cuerdas Minimales

Construir una teoría de cuerdas partiendo de una teoría conforme no es mas que interpretar nuestros campos de la teoría conforme como materia y acoplarla a la teoría de Liouville, por lo que para construir una cuerda minimal necesitamos considerar las teorías conformes minimales que estudiamos en el capítulo segundo acopladas con el campo  $\phi$ . Si

imponemos cancelación de la anomalía conforme, para el caso de la cuerda minimal  $M_{p,q}$  la constante de acoplo del campo de Liouville debe fijarse a

$$b = \sqrt{p/q} \quad (3.159)$$

Que  $b^2$  sea un número racional hace que aparezcan ciertas simplificaciones en el espacio de estados físicos, pero también algunas sutilezas. Una de las simplificaciones consiste en que no todos los primarios de la teoría de Liouville (parametrizados por  $a$ ) corresponden a estados físicos de la teoría de cuerdas minimal. Para construir estados físicos de la teoría de cuerdas lo que tenemos que hacer es vestir los primarios  $O_{r,s}$  de la teoría de materia con un primario de Liouville  $V_{a_{r,s}}$  tal que la combinación tenga peso conforme uno y después multiplicar por los fantasmas  $c\bar{c}$ . Llamemos taquiones a este tipo de operadores. Si imponemos

$$1 = h_{r,s} - \frac{a_{r,s}^2}{4} + \frac{a_{r,s}Q}{2} \quad (3.160)$$

donde

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (p - q)^2}{4pq} \quad (3.161)$$

nos encontramos con que los operadores taquiónicos son

$$T_{r,s} = c\bar{c}O_{r,s}V_{a_{r,s}} \quad (3.162)$$

$$a_{r,s} = \frac{p + q - rq + sp}{\sqrt{pq}} \quad (3.163)$$

donde  $rq - sp \geq 0$  y al resolver la ecuación cuadrática para encontrar el valor de  $a_{r,s}$  debemos quedarnos con la solución tal que  $a_{r,s} < Q$ .

Una sutileza importante que aparece cuando  $b^2$  es racional tiene que ver con los caracteres de los primarios singulares. La fórmula para  $b$  genérico

$$\chi_{r,s}(q) = \frac{q^{h_{a_{r,s}} - (c-1)/24}}{\eta(q)} (1 - q^{rs}) \quad (3.164)$$

debe modificarse por varias razones:

- Diferentes valores de  $r$  y  $s$  pueden dar lugar al mismo primario degenerado, por lo que distinguir las diferentes representaciones degeneradas por los parámetros  $r$  y  $s$  esconde una redundancia.

Para eliminar esta redundancia vamos a definir

$$N(t, m, n) = |tpq + mq + np| \quad (3.165)$$

y denotaremos cada representación con  $(t, m, n)$  donde  $0 < m \leq p$ ,  $0 < n \leq q$  y  $t \geq 0$ . En la representación degenerada  $(t, m, n)$  el primario singular asociado tiene dimensión conforme

$$h(t, m, n) = \frac{(p+q)^2 - N(t, m, n)^2}{4pq} \quad (3.166)$$

Ahora cada  $(t, m, n)$  corresponde a un único primario singular y viceversa.

- El módulo de Verma asociado a un primario singular puede tener mas de un vector singular. Si escribimos

$$N(t, m, n) = ((t-j)p + m)q + (jq + n)p \quad (3.167)$$

para  $j = 0 \dots t$  esperamos que por continuidad en  $b$  el módulo de Verma  $(t, m, n)$  tenga vectores singulares en los niveles

$$((t-j)p + m)(jq + n) \quad (3.168)$$

con dimensiones conformes

$$h = \frac{(p+q)^2 - N(t-2j, n, -m)^2}{4pq} \quad (3.169)$$

- Un vector singular puede por si mismo ser degenerado. Por ejemplo, los vectores singulares discutidos antes, son degenerados cuando  $t - 2j \neq 0$ . En general lo que nos encontramos es una estructura complicada de submódulos de Verma dentro del módulo original (muy parecida a la que nos encontrábamos en los modelos minimales).

Si tenemos todas estas sutilezas en cuenta los caracteres se modifican y quedan [69, 70]

$$\chi_{t,m,n}(q) = \frac{1}{\eta} \sum_{j=0}^t (q^{-N(t-2j,m,n)^2/4pq} - q^{-N(t-2j,m,-n)^2/4pq}) \quad (3.170)$$

Esta expresión para el carácter puede escribirse como una suma de caracteres para  $b$  genérico

$$\chi_{t,m,n} = \sum_{j=0}^{[t/2]} \chi_{(t-2j)p+m,n} - \sum_{j=0}^{[(t-1)/2]} \chi_{(t-2j)p-m,n} \quad (3.171)$$

Para  $t = 0$  tenemos  $\chi_{0,m,n} = \chi_{m,n}$ . Estas identidades serán importantes cuando estudiemos la relación entre las branas de tipo FZZT y las branas de tipo ZZ en el contexto de estos modelos.

### 3.3.2. Anillo Fundamental

Otro conjunto importante de operadores invariantes BRST en la cuerda minimal son los que componen el anillo fundamental de la teoría. El anillo fundamental consiste en todos los operadores de dimensión cero, primarios de la cohomología BRST de la teoría [71]. La multiplicación en el anillo se define mediante expansión en producto de operadores cocientando por los estados exactos bajo BRST. Como en los modelos minimales denotaremos los elementos del anillo fundamental por  $\hat{O}_{r,s}$  donde  $r = 1, \dots, p-1$  y  $s = 1 \dots q-1$ . A diferencia que en los modelos minimales  $\hat{O}_{r,s}$  y  $\hat{O}_{p-r,q-s}$  son operadores diferentes, por lo que el anillo fundamental tendrá el doble de elementos que el conjunto de primarios de la teoría de materia.

Para empezar la construcción del anillo fundamental vamos a considerar el operador  $O_{r,s}V_{a_{r,s}}$  de un primario de materia y su correspondiente primario de Liouville degenerado. Es fácil ver que la dimensión conforme de esta combinación es  $1 - rs$ . Actuando sobre  $O_{r,s}V_{a_{r,s}}$  con cierta combinación de operadores de Virasoro de nivel  $rs - 1$  obtendremos un operador perteneciente al anillo conforme (de dimensión cero por tanto)

$$\hat{O}_{r,s} = \ell_{r,s} O_{r,s} V_{a_{r,s}} \quad (3.172)$$

donde

$$a_{r,s} = \frac{p + q - rq - sp}{\sqrt{pq}} \quad (3.173)$$

Por la construcción se ve claro que  $\hat{O}_{r,s}$  tiene momento en la dirección de Liouville  $a_{r,s}$ . En el caso de los modelos minimales existe un único elemento del anillo fundamental para un momento en la dirección de Liouville dado  $a_{r,s}$  para  $r = 1 \dots p - 1$  y  $s = 1 \dots q - 1$ . La tabla de multiplicación para el anillo fundamental puede derivarse usando cinemática solamente. Cuando  $\mu = 0^5$  el momento de Liouville se conserva y por tanto

$$\hat{O}_{r,s} = \hat{O}_{1,2}^{s-1} \hat{O}_{2,1}^{r-1} \quad (3.174)$$

por lo que todo el anillo es generado por  $\hat{O}_{1,2}$  y  $\hat{O}_{2,1}$ . El hecho de que el anillo tenga un número finito de elementos impone relaciones no triviales sobre los generadores

$$\hat{O}_{1,2}^{q-1} = 0 \quad (3.175)$$

$$\hat{O}_{2,1}^{p-1} = 0 \quad (3.176)$$

Todas estas identidades deben entenderse módulo operadores exactos BRST.

Cuando  $\mu \neq 0$  el álgebra de operadores de Liouville se modifica

$$V_{-b}V_a = C_+V_{a-b} + C_-V_{a+b} \quad (3.177)$$

y es fácil ver que ello induce una modificación en las reglas de multiplicación del anillo fundamental. Vamos a definir

$$\hat{x} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\hat{O}_{1,2} \quad (3.178)$$

$$\hat{y} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{\mu}}}\hat{O}_{2,1} \quad (3.179)$$

Empecemos analizando los operadores  $\hat{O}_{r,1}$ . Es obvio que dicho operador podrá escribirse como un polinomio de grado  $r - 1$  en la variable  $\hat{y}$ ,  $P_{r-1}(\hat{y})$ . Dichos polinomios se

---

<sup>5</sup>Notar que desde este punto hemos redefinido  $\mu\gamma(b^2) \rightarrow \mu$  y similarmente para  $\hat{\mu}$ , así como  $\frac{\mu_B^2}{\pi}\gamma(b^2) \rightarrow \mu_B^2$  y similarmente para  $\hat{\mu}_B$  para simplificar las expresiones.

verán constreñidos por las reglas de fusión

$$P_{r-1}(\hat{y})P_{l-1}(\hat{y}) = \sum a_{r,l,k}P_{k-1}(\hat{y}) \quad (3.180)$$

donde  $k = |r - l| + 1, |r - l| + 3, \dots, \min(r + l - 1, 2p - 1 - r - l)$ . Estas restricciones en la suma determinan por si mismas muchos coeficientes de los polinomios sin necesidad de usar las reglas de fusión. Después de cierto trabajo uno encuentra que

$$\hat{O}_{r,1} = \mu^{\frac{q(r-1)}{2p}} U_{r-1}(\hat{y}) \quad (3.181)$$

donde  $U$  son los polinomios de Chebyshev de segunda clase. Este resultado se extiende fácilmente a los operadores  $\hat{O}_{1,s}$  que son generados por  $\hat{x}$ . Usando  $\hat{O}_{r,s} = \hat{O}_{r,1}\hat{O}_{1,s}$  puede derivarse la expresión para los elementos del anillo

$$\hat{O}_{r,s} = \mu^{\frac{q(r-1)+p(s-1)}{2p}} U_{s-1}(\hat{x})U_{r-1}(\hat{y}) \quad (3.182)$$

con las relaciones

$$U_{q-1}(\hat{x}) = 0 \quad (3.183)$$

$$U_{p-1}(\hat{y}) = 0 \quad (3.184)$$

Al tener las reglas de multiplicación en el anillo es sencillo analizar los operadores de tipo taquiónico. La conservación del número de fantasmas implica que los operadores de taquiión serán un módulo definido sobre el anillo [72]. Usando la representación de los elementos del anillo en términos de los generadores se ve que

$$T_{r,s} = \mu^{1-s}\hat{O}_{r,s}T_{1,1} = \mu^{\frac{q(r-1)-p(s-1)}{2p}} U_{s-1}(\hat{x})U_{r-1}(\hat{y})T_{1,1} \quad (3.185)$$

Usando esta expresión es fácil actuar en cualquier operador taquiónico con cualquier elemento del anillo. Basta con escribir el elemento del anillo en términos de los generadores y multiplicar los polinomios teniendo cuidado de aplicar las relaciones que mantiene el número de elementos del anillo finito.

Pero persiste el problema de que tengo el doble de elementos en el anillo que operadores taquiónicos ya que estos están identificados mediante

$$T_{p-r, q-s} = \mu^{\frac{pr-qs}{p}} T_{r,s} \quad (3.186)$$

Esto nos dice que aparte de las relaciones (3.183) tiene que existir mas relaciones que se satisfacen solamente en el módulo taquiónico. Si uno impone

$$(U_{q-2}(\hat{x}) - U_{p-2}(\hat{y}))T_{r,s} = 0 \quad (3.187)$$

puede verse que tenemos garantizada la identificación entre operadores taquiónicos [73–75]. Esta última relación también puede escribirse en términos de los polinomios de Chebyshev de primera clase  $T_p$

$$(T_q(\hat{x}) - T_p(\hat{y}))T_{r,s} = 0 \quad (3.188)$$

### 3.3.3. Branas de Liouville y Cuerdas Minimales

#### Branas FZZT

Vamos a estudiar en esta sección los estados de brana que aparecen en la teoría de Liouville cuando los acoplamos a modelos minimales  $M_{p,q}$ . Para empezar, vamos a considerar el estado construido como producto tensorial entre un estado de frontera de brana FZZT y un estado de materia

$$|\sigma, k, l \rangle = \int_0^\infty dp \psi^\dagger(p) |v_p \rangle |k, l \rangle \quad (3.189)$$

donde  $(k, l)$  denota el estado de materia asociado al primario  $O_{k,l}$ . La función de onda para Liouville es  $\psi(p)$  donde

$$\psi(p) = \mu^{-ip/2b} \frac{\Gamma(1 + ip/b)\Gamma(1 + ipb)}{i\pi p} \cos(\pi p \sigma) \quad (3.190)$$

La relación entre el parámetro  $\sigma$  y la constante cosmológica de frontera  $\mu_B$  es

$$\frac{\mu_B^2}{\mu} = \cosh^2 \pi b \sigma \quad (3.191)$$

Usando esta expresión para el estado de frontera  $|FZZT_\sigma\rangle$  es fácil calcular la función de correlación en el disco (con interacción de frontera en el borde del disco) y un operador insertado en el interior del disco. Si consideramos estos correladores, puede verse que se cumple [15]

$$\langle O|\sigma, k, l\rangle = \sum_{m', n'} \langle O|\sigma + \frac{i(m'q + n'p)}{\sqrt{pq}}, 1, 1\rangle \quad (3.192)$$

donde  $m'$  y  $n'$  toman los valores

$$m' = -(k-1), -(k-1)+2, \dots, k-1 \quad (3.193)$$

$$n' = -(l-1), -(l-1)+2, \dots, l-1 \quad (3.194)$$

y  $O$  es un operador físico arbitrario. Esto implica que podemos identificar (despreciando estados exactos bajo BRST)

$$|\sigma, k, l\rangle = \sum_{m', n'} |\sigma + \frac{i(m'q + n'p)}{\sqrt{pq}}, 1, 1\rangle \quad (3.195)$$

Por tanto, las branas FZZT con  $k = l = 1$  son una base completa para todas las branas (de tipo FZZT) en la teoría. Las branas con otros estados de materia pueden pensarse como compuestas por estos estados fundamentales. Para simplificar notación vamos a considerar que siempre estamos trabajando con estas branas  $(1, 1)$  y vamos a olvidar los índices que indican estados de materia.

Otra propiedad interesante de las funciones de correlación a un punto es que son invariantes bajo las transformaciones

$$\sigma \rightarrow -\sigma, \sigma \pm 2i\sqrt{pq} \quad (3.196)$$

Esto es nuevamente una indicación de que los estados con  $\sigma$ 's que difieran bajo estas transformaciones pueden ser identificados módulo estados BRST exactos. Por tanto, utilizar el parámetro  $\sigma$  complejo para distinguir los diferentes estados de brana FZZT no es buena idea ya que existe mucha redundancia. Tiene mas sentido definir

$$z = \cosh \frac{\pi\sigma}{\sqrt{pq}} \quad (3.197)$$

y utilizar  $z$  como etiqueta para distinguir los diferentes estados.

### Branas ZZ

Para construir los estados de brana ZZ asociados a estas teorías podemos proceder del mismo modo que en caso de las branas FZZT y considerar el producto tensorial entre estados  $|ZZ\rangle$  de la teoría de Liouville y estados de materia  $|k, l\rangle$ . Puede verse que en este caso también podemos fijarnos solamente en el estado de materia  $|1, 1\rangle$ , así que eso haremos y olvidaremos escribir el estado de materia explícitamente. Cuando hacemos esto se ve que existen ciertas sutilezas debidas a que  $b^2$  es racional. Al estar los estados de brana ZZ en correspondencia con las representaciones degeneradas de la teoría de Liouville el que  $b^2$  sea racional afecta al espectro de branas. Como ya estudiamos la fórmula para el carácter de las representaciones degeneradas en el caso de  $b^2$  racional es

$$\chi_{t,m,n}(q) = \frac{1}{\eta} \sum_{j=0}^t (q^{-N(t-2j,m,n)^2/4pq} - q^{-N(t-2j,m,-n)^2/4pq}) \quad (3.198)$$

La prescripción para construir un estado de brana ZZ es utilizar esta fórmula y sustituir los términos  $q^{-N^2/4pq}/\eta$  por estados de brana FZZT con  $\sigma = iN$  [15], con lo que tenemos

$$\begin{aligned} |t, m, n\rangle &= \sum_{j=0}^t (|z = \cos \frac{\pi N(t-2j, m, n)}{pq}\rangle \\ &\quad - |z = \cos \frac{\pi N(t-2j, m, -n)}{pq}\rangle) \\ &= (t+1) (|z = (-)^t \cos \frac{\pi(mp+nq)}{pq}\rangle \\ &\quad - |z = (-)^t \cos \frac{\pi(mq-np)}{pq}\rangle) \end{aligned} \quad (3.199)$$

En la última expresión podemos reconocer el estado de brana ZZ con  $t = 0$  luego tenemos

$$|t, m, n\rangle = (t+1)|0, m, n\rangle \quad t = par \quad (3.200)$$

$$|t, m, n\rangle = -(t+1)|0, m, q-n\rangle \quad t = impar \quad (3.201)$$

De aquí, es fácil deducir las identidades

$$|t, m, n \rangle = |t, p - m, q - n \rangle \quad (3.202)$$

y  $|t, m, n \rangle = 0$  cuando  $m = p$  o  $n = q$ . Es importante recordar que todas estas identidades solo son ciertas si despreciamos estados exactos BRST.

Finalmente lo que nos encontramos es que podemos escribir los estados de brana ZZ para estos modelos como diferencias de estados de brana FZZT [21].

$$|0, m, n \rangle = |z = \cos \frac{\pi \sigma_{m,n}}{\sqrt{pq}} \rangle - |z = \cos \frac{\pi \sigma_{m,-n}}{\sqrt{pq}} \rangle \quad (3.203)$$

con

$$\sigma_{m,n} = i(nb + m/b) \quad (3.204)$$

La constante cosmológica de frontera correspondiente a  $\sigma_{m,n}$  es

$$\mu_B = \sqrt{\mu}(-)^m \cos \pi nb^2 \quad (3.205)$$

luego los dos estados de tipo FZZT que componen el estado ZZ tiene la misma constante cosmológica de frontera.

Con las diferentes identificaciones que están en nuestro poder, podemos descomponer cualquier brana de tipo ZZ en branas ZZ con  $t = 0$ ,  $1 \leq m \leq p - 1$ ,  $1 \leq n \leq q - 1$  y  $mq - np > 0$ . Llamaremos a estas  $(p - 1)(q - 1)/2$  branas ZZ principales.. Este conjunto de ZZ-branas principales es una base completa para el espacio de estados con condiciones de frontera tipo ZZ.

Examinando las funciones de correlación a un punto, puede verse que uno puede de forma consistente asumir que los estados de ZZ-brana fundamental son autovectores de los generadores del anillo fundamental

$$\hat{x}|m, n \rangle = x_{m,n}|m, n \rangle \quad (3.206)$$

$$\hat{y}|m, n \rangle = y_{m,n}|m, n \rangle \quad (3.207)$$

con autovalores

$$x_{m,n} = (-)^m \cos \frac{\pi n p}{q} \quad (3.208)$$

$$y_{m,n} = (-)^n \cos \frac{\pi m q}{p} \quad (3.209)$$

Notar que  $x_{m,n}$  es básicamente el valor de la constante cosmológica de frontera para la brana ZZ de tipo  $(m, n)$ .

# Capítulo 4

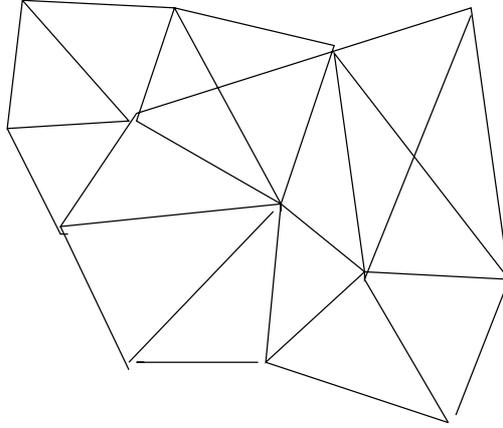
## Modelos de Matrices

En este capítulo vamos a introducir toda la tecnología referente a modelos matriciales que necesitaremos en capítulos posteriores. La aproximación discreta a la gravedad cuántica en dos dimensiones resulta muy útil ya que como hemos visto, los cálculos concretos en la teoría de Liouville son muchas veces complicados. La aproximación discreta aporta una intuición muy importante para entender físicamente las teorías de gravedad cuántica. El problema principal de esta aproximación es que solo parece funcionar para teorías de materia con  $c \leq 1$  lo que tal vez nos aleja demasiado de una teoría realista. Para una introducción ver [66–68]

Consideremos un teoría para superficies de Riemann sin materia adicional. La función de partición es

$$Z = \sum_h \int Dg e^{-uA - v\chi} \quad (4.1)$$

donde la suma sobre topologías esta representada por  $h$  (el número de asas de la superficie),  $A$  es el área de la superficie  $A = \int \sqrt{g}$  y  $\chi$  es la característica de Euler  $\chi = \frac{1}{4\pi} \int \sqrt{g} R = 2 - 2h$ . Una forma de calcular la integral sobre las métricas es usando el formalismo de Liouville, pero también podemos discretizar la superficie, para después del cálculo tomar cierto límite continuo. Si consideramos una triangulación aleatoria de la superficie (con triángulos equiláteros) la curvatura pasa a estar concentrada en los vértices. Si denotamos



Triangulación aleatoria de una superficie.

los vértices mediante el índice  $i$ , y  $N_i$  es el número de triángulos que convergen al vértice  $i$ , la curvatura en dicho vértice será negativa cuando  $N_i < 6$ , positiva cuando  $N_i > 6$ , y nula si  $N_i = 6$ . La suma sobre las triangulaciones es un análogo discreto a la suma sobre métricas y topologías.

$$\sum_h \int Dg \rightarrow \sum_{\text{triangulaciones}} \quad (4.2)$$

Al elemento de volumen  $\sqrt{g}$  le corresponde  $s_i = N_i/3$  y el área total  $|S| = \sum_i s_i$  no es mas que el número de triángulos. Para la curvatura  $R$  corresponde  $R_i = \frac{2\pi}{N_i}(1 - \frac{6}{N_i})$  con lo que

$$\frac{1}{4\pi} \int \sqrt{g} R = \sum_i 1 - \frac{N_i}{6} = V - F/2 = V - E + F = \chi \quad (4.3)$$

donde  $V$  es el número de vértices,  $F$  es el número de caras y  $E$  es el número de aristas. Aquí hemos usado que para una red triangular  $3F = 2E$ . Puede verse que las triangulaciones aleatorias pueden reproducirse si consideramos la integral

$$e^Z = \int dM e^{-\text{tr}(M^2 + gM^3/\sqrt{N})} \quad (4.4)$$

donde  $M$  es una matriz hermítica  $N \times N$ . La expansión en potencias de  $g$  nos genera una serie de triangulaciones <sup>1</sup> en el número de vértices. Si el área de cada triángulo es la unidad,

---

<sup>1</sup>Siendo mas precisos, sus duales

el término con  $g^n$  describe superficies de área  $n$  con lo que  $g \sim e^{-u}$ . Necesitamos  $e^Z$  para que  $Z$  sea una expansión en triangulaciones conexas. En los modelos matriciales también tenemos el parámetro  $N$ . Si redefinimos  $M \rightarrow \sqrt{N}M$  la acción nos queda  $N \text{tr}(M^2 + gM^3)$ . Con esto resulta fácil calcular la potencia de  $N$  asociada a cada diagrama. Cada vértice nos da un factor de  $N$ , cada arista (propagador) da un factor  $1/N$  y cada cara (loop) un factor  $N$ , con lo que la dependencia en  $N$  nos queda

$$N^{V-E+F} = N^\chi = N^{2-2h} \quad (4.5)$$

por lo que  $N \sim e^v$ .

Veamos ahora como podemos tomar el límite continuo en estas triangulaciones. Si expandimos  $Z$

$$Z = N^2 Z_0(g) + Z_1(g) + N^{-2} Z_2(g) + \dots \quad (4.6)$$

donde  $Z_h$  da las contribuciones de triangulaciones de genus  $h$ , vemos que para  $N$  muy grande solo nos sobrevive  $Z_0$ . Si expandimos  $Z_0$  en potencias de  $g$  [76]

$$Z_0(g) \sim \sum_n n^{\gamma-3} (g/g_c)^n \sim (g - g_c)^{2-\gamma} \quad (4.7)$$

que es divergente cuando  $g$  tiende a un valor crítico  $g_c$ . El límite continuo puede considerarse como tomar  $g \rightarrow g_c$ . Esto se debe a que el valor esperado del área

$$\langle A \rangle = \langle n \rangle = \frac{\partial}{\partial g} \log Z_0 \sim \frac{1}{g - g_c} \quad (4.8)$$

explota en dicho límite por lo que debemos rescalear el área de los triángulos individuales a cero para así mantener el área finita. En principio no estamos seguros de que esta sea la definición correcta para el límite continuo, pero si podemos calcular algunas cantidades en ambos lados veremos si funciona o no. Algo que podíamos calcular en la aproximación continua era la susceptibilidad  $\gamma$  definida con

$$Z(A) \sim A^{(\gamma-2)\chi/2-1} \quad (4.9)$$

con  $A$  grande. Veremos que esta  $\gamma$  puede calcularse también en el límite continuo de estos modelos de matrices y encaja perfectamente con el cálculo en la teoría de Liouville.

El límite anterior es un poco simple, ya que perdemos toda la información de genus mas altos. Si consideramos la expansión en  $g$  para  $h > 0$

$$Z_h(g) \sim \sum_n n^{(\gamma-2)\chi/2-1} (g/g_c)^n \sim (g - g_c)^{(\gamma-2)\chi/2} \quad (4.10)$$

podemos compensar el límite  $N \rightarrow \infty$  tomando  $g \rightarrow g_c$  de tal forma que

$$\kappa = \frac{1}{N} (g - g_c)^{(\gamma-2)/2} \quad (4.11)$$

se mantenga fijo. Con este límite podemos escribir

$$Z = \kappa^{-2} f_0 + f_1 + \kappa^2 f_2 + \dots \quad (4.12)$$

con lo que retenemos la información para todos los genus.

## 4.1. Polinomios Ortogonales

Vamos a escribir la función de partición del modelo de matrices de la forma

$$e^Z = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} = \int \prod_i dl_i \Delta^2 e^{-N \sum_i V(l_i)} \quad (4.13)$$

con  $i = 1 \dots N$ .  $l_i$  son los autovalores de  $M$ .  $\Delta$  es el jacobiano de la transformación correspondiente

$$\Delta = \prod_{i < j} (l_j - l_i) = \det l_i^{j-1} \quad (4.14)$$

Para resolver este sistema consideremos un conjunto infinito de polinomios ortogonales  $P_n(l)$  con medida

$$\int dl e^{-NV(l)} P_n(l) P_m(l) = h_m \delta_{mn} \quad (4.15)$$

y la normalización fijada por  $P_n = l^n + \dots$ . Es fácil ver que  $\Delta = \det P_{j-1}(l_i)$ . Desarrollando los determinantes nos encontramos con que

$$e^Z = N! \prod_{i=0}^{N-1} h_i = N! h_0^N \prod_{k=1}^{N-1} f_k^{N-k} \quad (4.16)$$

donde  $f_k = h_k/h_{k-1}$ . Cuando  $N \rightarrow \infty$  el índice  $k/N$  deviene en una variable continua  $\xi$  de 0 a 1 y  $f_k/N$  va a una función  $f(\xi)$ . En este límite la función de partición nos queda

$$\frac{1}{N^2} Z = \frac{1}{N} \sum_k \left(1 - \frac{k}{N}\right) \log f_k \sim \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \log f(\xi) \quad (4.17)$$

Para derivar la forma de  $f$  vamos a suponer que  $V$  es par. Los polinomios  $P_n$  satisfacen relaciones de recurrencia

$$lP_n = P_{n+1} + r_n P_{n-1} \quad (4.18)$$

con  $r_n$  independiente de  $l$ . Si consideramos  $P_n l P_{n-1}$  podemos deducir que

$$\int e^{-NV} P_n l P_{n-1} = r_n h_{n-1} = h_n \quad (4.19)$$

con lo que tenemos que  $f_n = r_n$ . Si ahora consideramos  $P'_n l P_n$  sacamos

$$n h_n = \int e^{-NV} P'_n l P_n = \int e^{-NV} P'_n r_n P_{n-1} = N r_n \int e^{-NV} V' P_n P_{n-1} \quad (4.20)$$

que utilizaremos para calcular las  $r_n$ .

#### 4.1.1. Función de Partición en el Límite Planar

Vamos a considerar el potencial

$$V = \frac{1}{2g} (l^2 + l^4 + b l^6) \quad (4.21)$$

$$gV' = l + 2l^3 + 3bl^5 \quad (4.22)$$

Usando (4.20) podemos ver que

$$gn = r_n + \frac{2}{N} (r_{n+1} + r_n + r_{n-1}) r_n + \frac{3b}{N^2} (10 \text{ términos } O(r^3)) \quad (4.23)$$

En el límite de  $N$  muy grande el índice  $n$  deviene en el índice continuo  $\xi$  y  $r_n/N \rightarrow r(\xi)$  y  $r_{n\pm 1}/N \rightarrow r(\xi \pm 1/N)$ . A primer orden en  $1/N$  nos encontramos que

$$g\xi = r + 6r^2 + 30br^3 = W(r) = g_c + \frac{1}{2} W''(r_c) (r - r_c)^2 + \dots \quad (4.24)$$

donde  $r_c$  es el punto donde la primera derivada de  $W$  se anula y  $g_c = W(r_c)$ . De aquí vemos inmediatamente que

$$r - r_c \sim (g_c - g\xi)^{1/2} \quad (4.25)$$

Para conectar esto con la aproximación continua supongamos que  $r$  presenta un comportamiento singular del tipo

$$r - r_c \sim (g_c - g\xi)^{-\gamma} \quad (4.26)$$

para  $g$  cerca de  $g_c$  y  $\xi$  cerca de 1. El comportamiento de la función de partición en este límite es por lo tanto

$$\frac{1}{N^2} Z \sim \int_0^1 (1 - \xi)(g_c - g\xi)^{-\gamma} \sim (g_c - g)^{2-\gamma} \sim \sum_n n^{\gamma-3} (g/g_c)^n \quad (4.27)$$

Recordando (4.7) vemos que  $\gamma$  es la susceptibilidad de la gravedad cuántica con materia asociada al modelo de matrices. Si derivamos dos veces con respecto a  $x = g_c - g$  nos encontramos con el comportamiento singular

$$Z'' \sim (g_c - g)^{-\gamma} \sim f(1) \quad (4.28)$$

De todo esto vemos que para el modelo de matrices que estamos considerando  $\gamma = -1/2$  lo que nos dice que la teoría de cuerdas asociada tiene  $c = 0$  luego es la cuerda minimal de tipo  $(2, 3)$ . Ajustando el parámetro  $b$  podemos conseguir puntos críticos de orden mas alto, por ejemplo  $W' = W'' = 0$  lo que nos daría  $\gamma = -1/3$ . En general, ajustando los parámetros de  $V$  podemos conseguir comportamientos críticos de la forma  $r - r_c \sim (g_c - g)^{1/m}$  que estarán asociados a exponentes  $\gamma = -1/m$ , luego a cuerdas minimales con  $p + q = 2m + 1$ .

### 4.1.2. Mas allá del Límite Planar

Para estudiar las correcciones a ordenes mas altos en genus debemos retener los términos a orden mas alto en  $1/N$

$$\begin{aligned} g\xi &= W(r) + 2r(\xi)(r(\xi + 1/N) + r(\xi - 1/N) - 2r(\xi)) \quad (4.29) \\ &= g_c + \frac{1}{2}W''(r_c)(r(\xi) - r_c)^2 + 2r(\xi)(r(\xi + 1/N) + r(\xi - 1/N) - 2r(\xi)) + \dots \end{aligned}$$

y hacer el límite continuo mandando  $N$  a infinito al mismo tiempo que mandamos  $g \rightarrow g_c$ . Ya que  $g - g_c$  tiene dimensiones de longitud al cuadrado es útil introducir un parámetro  $a$  con dimensiones de longitud y definir  $g - g_c = \kappa^{-4/5} a^2$  con  $a \rightarrow 0$ . Para ser coherentes con lo que explicamos en la introducción del capítulo se ve que  $N = a^{-5/2}$  con lo que la cantidad  $\kappa$  se mantiene finita en el límite en el que  $g \rightarrow g_c$  y  $N \rightarrow \infty$ .

En el límite que estamos considerando la función de partición esta dominada por la región en la que  $\xi \sim 1$  con lo que es conveniente definir  $\mu = (g_c - g\xi)/a^2$ . En esta región vamos a suponer que  $r = r_c + au(\mu)$ . Si utilizamos estas expresiones vemos que a orden mas bajo en  $a$  tenemos que  $u^2 \sim \mu$ . Cuando incluimos términos de mayor orden si notamos que

$$r(\xi + 1/N) + r(\xi - 1/N) - 2r(\xi) \sim N^{-2} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \sim a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = a^2 u'' \quad (4.30)$$

nos encontramos con que  $u$  debe satisfacer la ecuación diferencial (después de un cambio de escala en  $u$  y  $\mu$ )

$$\mu = u^2 - u''/3 \quad (4.31)$$

La solución de esta ecuación caracteriza el comportamiento de la función de partición para el modelo (2,3) a todo orden en la expansión en genus. Si consideramos un punto crítico de orden mas alto debemos usar  $g - g_c = \kappa^{2/(\gamma-2)} a^2$  y  $N = a^{\gamma-2}$ , de tal modo que  $\kappa = N^{-1}(g - g_c)^{-1+\gamma/2}$  se mantiene fijo en el límite en el que  $a \rightarrow 0$ . Estar en  $\xi = 1$  corresponde en este caso a  $\mu = \kappa^{2/(\gamma-2)}$ . Suponemos en este caso que  $r = r_c + a^{-2\gamma} u(\mu)$ .

Para un punto crítico de orden  $m$  el modelo de matrices estará asociado a la teoría de cuerdas con susceptibilidad  $\gamma = -1/m$ . Con un comportamiento  $r = r_c + a^{2/m} u(\mu)$  encontramos que a primer orden  $u \sim \mu^{1/m}$ . La ecuación diferencial que satisface  $u$  pertenece a lo que se llama la jerarquía KdV de ecuaciones diferenciales.

Para las cuerdas minimales de tipo  $(p, q)$  el exponente crítico corresponde a  $\gamma = -2/(p+q-1)$ . El punto crítico de orden  $m$  corresponde a modelos con  $p = 2$  y  $q = 2m - 1$ . Para modelos con  $p > 2$  necesitamos considerar modelos con mas de una matriz.

### 4.1.3. Ecuaciones KdV

Vamos a discutir que es este concepto llamado jerarquía KdV. Para esto vamos a necesitar considerar los polinomios ortonormales asociados al modelo de matrices  $\Pi_n = P_n/\sqrt{h_n}$  que satisfacen

$$\int e^{-NV} \Pi_n \Pi_m = \delta_{mn} \quad (4.32)$$

En términos de estos polinomios las relaciones de recurrencia quedan

$$l\Pi_n = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} \Pi_n + r_n \sqrt{\frac{h_{n-1}}{h_n}} \Pi_{n-1} = Q_{nm} \Pi_m \quad (4.33)$$

En notación matricial podemos escribir  $l\Pi = Q\Pi$  donde la matriz  $Q$  viene dada por

$$Q_{nm} = \sqrt{r_m} \delta_{m,n+1} + \sqrt{r_n} \delta_{m+1,n} \quad (4.34)$$

Las propiedades de ortonormalidad implican que  $Q$  es una matriz simétrica. En el límite continuo  $Q$  se convierte en un operador diferencial. Si consideramos el punto crítico de orden  $m$  y usamos que  $r = r_c + a^{2/m}u(\mu)$  [43]

$$Q \rightarrow (r_c + a^{2/m}u)^{1/2} e^{N^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}} + e^{-N^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}} (r_c + a^{2/m}u)^{1/2} \quad (4.35)$$

que al orden mas bajo puede escribirse

$$Q = 2\sqrt{r_c} + \frac{a^{2/m}}{\sqrt{r_c}} (u + r_c \kappa^2 \partial_\mu^2) \quad (4.36)$$

que es un operador diferencial de segundo orden.

Otra matriz que podemos definir de forma natural es aquella asociada a la diferenciación

$$\frac{\partial}{\partial l} \Pi_n = A_{nm} \Pi_m \quad (4.37)$$

que satisface automáticamente  $[A, Q] = 1$ . La matriz  $A$  no tiene propiedades especiales de simetría o antisimetría con lo que es conveniente utilizar la matriz  $P = (A - A^T)/2$  que es antisimétrica y que satisface el mismo conmutador con  $Q$  que  $A$

$$[P, Q] = 1 \quad (4.38)$$

Para determinar el orden del operador diferencial  $Q$  en el límite continuo vamos a asumir que el potencial  $V$  es una función par de orden  $2j$ . Para  $m > n$  los elementos de matriz  $A_{mn}$  serán no nulos para  $m - n \leq 2j - 1$ . Esto implica que  $P_{mn} \neq 0$  para  $|m - n| \leq 2j - 1$  por lo que tenemos suficientes parámetros para terminar en el continuo con un operador diferencial de orden  $2j - 1$ . La condición  $W' = 0$  hace que  $P$  sea un operador de tercer orden, y las condiciones  $W'' = W''' = \dots = W^{(j-1)} = 0$  permiten que  $P$  se realice como un operador diferencial de orden  $2j - 1$ . Después de rescaleos apropiados vemos que para modelos de una sola matriz  $Q = \kappa d^2 - u$ . Para un punto crítico simple  $W' = 0$  el límite continuo de  $P$  es un operador antihermítico  $P = \kappa^3 d^3 - 3\kappa\{u, d\}/4$ , y el conmutador es

$$\kappa = [P, Q] = 4R'_2 = \kappa^3 \left( \frac{3u^2}{4} - \frac{u''}{4} \right)' \quad (4.39)$$

que después de integrar una vez en  $\mu$  es equivalente a la condición (4.31). La notación  $R_2$  es convencional para el primer elemento de la jerarquía KdV. A los operadores  $Q$  y  $P$  se les llama operadores de Lax del sistema.

En general, la ecuación diferencial  $[P, Q] = 1$  puede determinarse directamente en el límite continuo. Dado el operador  $Q$ , el operador diferencial  $P$  puede construirse como una potencia fraccionaria del operador  $Q$ .

Pasemos a considerar ahora modelos con mas de una matriz. Sea un modelo con  $p - 1$  matrices y función de partición

$$e^Z = \int \prod_{i=1}^{p-1} dM_i e^{-N \text{tr}(\sum_{i=1}^{p-1} V_i(M_i) - \sum_{i=1}^{p-2} M_i M_{i+1})} \quad (4.40)$$

que, diagonalizando todas las matrices puede escribirse como

$$e^Z = \int \prod_{i=1}^{p-1} \prod_{a=1}^N dl_i^a \Delta_1 e^{-N \sum_{i,a} V_i(l_i^a) + N \sum_{i,a} l_i^a l_{i+1}^a} \Delta_{p-1} \quad (4.41)$$

donde  $M_i$  con  $i = 1 \dots p - 1$  son matrices hermíticas  $N \times N$  y  $l_1^a$  con  $a = 1 \dots N$  son los autovalores y  $\Delta_i = \prod_{a < b} (l_i^a - l_i^b)$  son los jacobianos de la transformación. Mediante expansión en diagramas de Feynmann se ve que estamos generando discretizaciones de superficies

donde el índice  $i$  representa los  $p - 1$  estados de materia diferentes que pueden existir en los vértices. Por tanto  $Z$  admite una interpretación como gravedad en dos dimensiones acoplada a materia. Puede verse que dichos modelos de matrices corresponden en el límite continuo a las cuerdas minimales de tipo  $(p, q)$  con  $p > 2$ .

Podemos definir los operadores  $Q_i$  y  $P_i$  que corresponden a insertar los operadores  $l_i$  y  $\partial/\partial l_i$  en la integral que define la función de partición. Estos operadores satisfacen obviamente  $[P_i, Q_i] = 1$ .

En el límite continuo  $N \rightarrow \infty$  todo este conjunto de operadores discretos se reducen a un par de operadores diferenciales  $P$  y  $Q$  de orden  $q$  y  $p$  respectivamente [43]. Dichos operadores satisfacen  $[P, Q] = \kappa$ . Aquí estamos asumiendo todo el rato que  $p < q$ .

En el límite continuo  $Q$  deviene en un operador de la forma ( $d = \partial_\mu$ )

$$Q = \kappa^p d^p + \kappa^{p-2} \{v_{p-2}(\mu), d^{p-2}\} + \dots + 2v_0(\mu) \quad (4.42)$$

El límite continuo de los modelos de matrices se reduce entonces a encontrar soluciones de  $[P, Q] = \kappa$ . Cuando  $p$  y  $q$  son primos entre si, un operador de orden  $p$  que satisfaga (4.38) con  $Q$  puede construirse como una potencia fraccionaria de  $Q$ . Formalmente

$$Q^{1/p} = \kappa d + \sum_{i=1}^{\infty} \kappa^{-i} \{e_i, d^{-i}\} \quad (4.43)$$

donde  $d^{-1}$  es definido tal que satisface  $d^{-1} f = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j f^{(j)} d^{-j-1}$  [77]. Las ecuaciones diferenciales que nos describen las cuerdas minimales de tipo  $(p, q)$  viene dadas por

$$[Q_+^{q/p}, Q] = \kappa \quad (4.44)$$

donde el subíndice  $+$  indica que debemos quedarnos solo con los términos que tengan potencias no negativas de  $d$  con lo que  $P = Q_+^{q/p}$  es un operador diferencial de orden  $q$ .

Ya que en esta memoria nos vamos a centrar en los modelos con  $p = 2$  vamos a ver en detalle como funciona esta construcción en este caso. Para los modelos de tipo  $(2, 2m - 1)$  (asociados a modelos de matrices con una sola matriz) el operador  $Q$  es de la forma

$$Q = \kappa^2 d^2 - u(\mu) \quad (4.45)$$

La expansión formal de  $Q^{m-1/2}$  (que es un operador antihermítico) en potencias de  $d$  viene dada por

$$Q^{m-1/2} = \kappa^{2m-1} d^{2m-1} - \frac{2m-1}{4} \kappa^{2m-3} \{u, d^{2m-3}\} + \dots \quad (4.46)$$

Si ahora descomponemos  $Q^{m-1/2} = Q_+^{m-1/2} + Q_-^{m-1/2}$  en potencias negativas y no negativas de  $d$  encontramos que

$$Q_-^{m-1/2} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa^{1-2i} \{e_{2i-1}, d^{-2i+1}\} = \kappa^{-1} \{R_m, d^{-1}\} + \dots \quad (4.47)$$

donde hemos identificado  $R_m = e_1$  como el primer término en el desarrollo de  $Q_-^{m-1/2}$ . Para el caso  $m = 1$  nos encontramos con que  $Q_+^{1/2} = \kappa d$  y  $R_1 = -\kappa u/4$ .

La condición  $[Q_+^{q/p}, Q] = \kappa$  con  $p/q = m - 1/2$  corresponde a calcular  $[Q_+^{m-1/2}, Q] = \kappa$ . Ya que  $Q$  conmuta con  $Q^{m-1/2}$  tenemos que

$$[Q_+^{m-1/2}, Q] = [Q, Q_-^{m-1/2}] \quad (4.48)$$

pero como  $Q = \kappa^2 d^2 - u$  y como la parte derecha de la ecuación anterior solo puede tener potencias positivas de  $d$  vemos que solo el término que lleva la potencia  $d^{-1}$  en la expansión de  $Q_-^{m-1/2}$  nos dará contribución distinta de cero, luego

$$[Q_+^{m-1/2}, Q] = 4R'_m \quad (4.49)$$

Si integramos  $[Q_+^{m-1/2}, Q] = \kappa$  con respecto a  $\mu$  encontramos simplemente

$$cR_m(u) = \mu \quad (4.50)$$

donde hemos introducido una constante  $c$  para tener en cuenta posibles cambios de escala de  $u$  y  $\mu$  (notar que todos los términos de  $R_m$  tiene el mismo grado, es decir  $2m$ ).

Es fácil ver que los objetos  $R_m$  satisfacen una simple relación de recurrencia. De la identidad  $Q^{m-1/2} = QQ^{m-1/2} = Q^{m-1/2}Q$  se puede deducir que

$$Q_+^{m+1/2} = \frac{1}{2}(Q_+^{m-1/2}Q + QQ_+^{m-1/2}) + \{R_m, d\}\kappa \quad (4.51)$$

de la que es sencillo sacar que

$$R'_{m+1} = \frac{1}{4}R'''_m - uR'_m - \frac{1}{2}u'R_m \quad (4.52)$$

Esta relación de recurrencia nos determina todos los  $R_m$  imponiendo que todos los  $R_m$  con  $m \neq 0$  se anulen en  $u = 0$ . Con esto podemos calcular los primeros  $R_m$

$$R_0 = \frac{1}{2} \quad (4.53)$$

$$R_1 = -\frac{1}{4}u\kappa \quad (4.54)$$

$$R_2 = \left(\frac{3}{16}u^2 - \frac{1}{16}u''\right)\kappa^3 \quad (4.55)$$

$$R_3 = \left(-\frac{5}{32}u^3 + \frac{5}{32}(uu'' + \frac{1}{2}u'^2) - \frac{1}{16}u^{(4)}\right)\kappa^5 \quad (4.56)$$

con lo que los operadores  $P$  quedan

$$Q_+^{1/2} = \kappa d \quad (4.57)$$

$$Q_+^{3/2} = \kappa^3 d^3 - \kappa \frac{3}{4}\{u, d\} \quad (4.58)$$

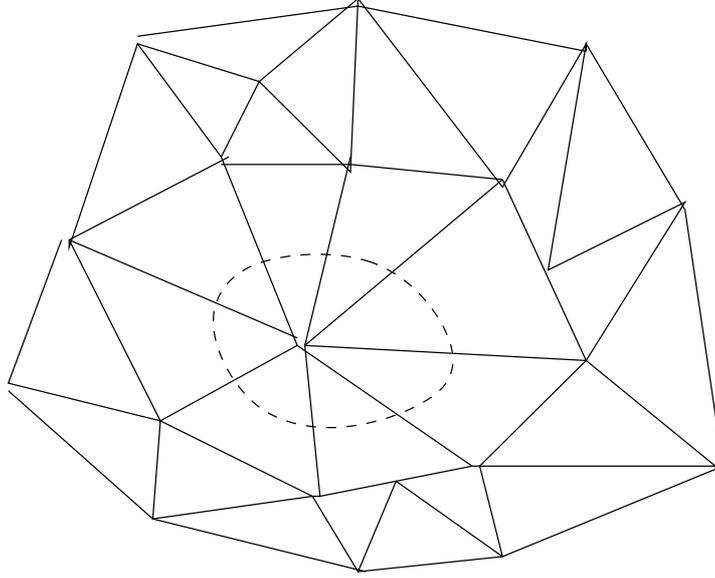
$$Q_+^{5/2} = \kappa^5 d^5 - \kappa^3 \frac{5}{4}\{u, d^3\} + \kappa \frac{5}{16}\{(3u^2 + u''), d\} \quad (4.59)$$

Con estos objetos podemos determinar el comportamiento de la función de partición para las cuerdas minimales  $(2, q)$ . Puede verse [78] que para describir modelos con  $p > 2$  no es necesario considerar modelos con  $p - 1$  matrices, sino que basta utilizar modelos de dos matrices. Considerando solo dos matrices tenemos suficiente libertad en los coeficientes de los potenciales para terminar con operadores  $P$  y  $Q$  de ordenes  $q$  y  $p$  en el límite continuo.

## 4.2. Loops en la Red

Vamos a considerar en modelo de una sola matriz hermítica  $N \times N$  con función de partición

$$e^Z = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} \quad (4.60)$$



Loop microscópico creado por la inserción de  $\frac{1}{8}trM^8$

En la expansión de esta función en diagramas de Feynmann la inserción del operador

$$\frac{1}{k}trM^k \quad (4.61)$$

crea un vértice del que salen  $k$  aristas como se ve en la figura. Esto en la triangulación se interpreta como que dicho operador ha creado un agujero en la superficie de longitud  $k$  (siendo mas precisos  $ka$  donde  $a$  es la longitud del lado del triángulo). Por tanto, en el límite continuo el tamaño de estos agujeros sera nulo. Al operador se le da el nombre de loop microscópico.

Para obtener en la superficie agujeros de tamaño macroscópico debemos tomar el límite continuo en que que el tamaño de los triángulos va a cero y a la vez tomar  $k \rightarrow \infty$  de modo tal que el tamaño del agujero al final sea finito.

Después de lo que hemos visto en el formalismo de polinomios ortogonales es claro que ya que en límite continuo

$$Q = 2\sqrt{r_c} + \frac{a^{2/m}}{\sqrt{r_c}}(u + r_c\kappa^2\partial_z^2) \quad (4.62)$$

si mantenemos  $ka^{2/m} = 2r_c\ell$  fijo mientras tomamos  $a \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow \infty$  entonces

$$\frac{1}{k} \text{tr} M^k \rightarrow e^{\ell Q} \quad (4.63)$$

Con esto, podemos escribir el operador de loop macroscópico en la red como

$$W(L) = \frac{1}{N} \text{tr} e^{LM} \quad (4.64)$$

donde  $L$  es una especie de potencial químico para la longitud de la frontera del agujero. Este operador tiene el mismo límite continuo  $e^{\ell Q}$ . Para analizar superficies con agujeros en la aproximación discreta vamos a definir el resolvente

$$R(x) = \int_0^\infty dL e^{-xL} W(L) \quad (4.65)$$

Definiendo  $x = \mu_B$ , podemos interpretar  $\mu_B$  como la constante cosmológica discreta de frontera. La ecuación anterior puede pensarse como el análogo en la aproximación discreta de

$$Z(\mu_B) = \sum_{A=1}^\infty e^{-\mu_B A} Z(A) \quad (4.66)$$

que relaciona las funciones de partición a área fija y a constante cosmológica fija en la aproximación continua. Si queremos expresar el operador de loop macroscópico como función de la constante cosmológica de frontera debemos realizar la transformación integral

$$W(x) = - \int_0^\infty \frac{dL}{L} e^{-xL} W(L) \quad (4.67)$$

### 4.2.1. Ecuaciones de Loops

Para calcular  $R(x)$  podemos usar las ecuaciones de Loops [79–81] para el modelo de matrices.

Las ecuaciones de loop se derivan de el hecho de que la función de partición debe ser independiente de cambios de variable. Para organizar cambios de variables arbitrarios vamos a considerar

$$M \rightarrow M + \frac{e}{x - M} \quad (4.68)$$

donde  $e$  es el parámetro infinitesimal de la transformación. Bajo este cambio

$$\text{tr}V(M) \rightarrow \text{tr}V(M) + e \text{tr} \frac{V'(M)}{x - M} \quad (4.69)$$

$$dM \rightarrow dM(1 + eN^2 R(x)^2) \quad (4.70)$$

si insertamos estas transformaciones en la función de partición e imponemos que esta sea invariante a primer orden en  $e$  nos encontramos con

$$\langle R(x)^2 \rangle = \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{V'}{x - M} \rangle \quad (4.71)$$

Vamos a expandir esta ecuación en  $1/N$ .  $R$  está normalizado de tal modo que la expansión de  $\langle R \rangle$  en  $1/N$  empieza a  $O(1)$

$$\langle R(x) \rangle \sim \langle R(x) \rangle_{h=0} + \frac{1}{N^2} \langle R(x) \rangle_{h=1} + \dots \quad (4.72)$$

Al considerar el valor esperado  $\langle R(x)^2 \rangle$  podemos separar las contribuciones conexas de las no conexas

$$\langle R(x)^2 \rangle = \langle R(x) \rangle^2 + \frac{1}{N^2} \langle R(x)^2 \rangle_c \quad (4.73)$$

donde el segundo término corresponde a las contribuciones conexas. Si expandimos  $V'$  como un polinomio en  $x - M$  con coeficientes que son polinomios en  $x$  encontramos que  $\langle R(x) \rangle_{h=0}$  debe satisfacer

$$\langle R(x) \rangle_{h=0}^2 - V'(x) \langle R(x) \rangle_{h=0} + \langle Q \rangle = 0 \quad (4.74)$$

donde

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} V^{(k+1)}(x) \frac{1}{N} \text{tr}(M - x)^{k-1} \quad (4.75)$$

Usando este resultado es trivial ver que para el caso del modelo Gaussiano ( $V = M^2/2$ )

$$\langle R(x) \rangle_{h=0} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 2}) \quad (4.76)$$

### 4.3. Fermiones Libres

La razón principal por la que los modelos de matrices son totalmente resolubles es que pueden demostrarse equivalentes a sistemas de fermiones libres. Esta representación en términos de fermiones libres nos va a permitir discutir de forma rigurosa el límite continuo para operadores de loop macroscópico. Al estudiar el formalismo de los polinomios ortogonales vimos que los correladores podían expresarse como integrales de potencias de los autovalores  $l$  multiplicados por un jacobiano  $\Delta$ . Si interpretamos dicho jacobiano como el determinante de Slater de una teoría de fermiones libres, podemos definir el campo de Fermi

$$\Psi(l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(l) \quad (4.77)$$

donde  $\psi_n$  son las funciones de onda ortonormales construidas usando los polinomios ortogonales  $P_n$

$$\psi_n(l) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} P_n(l) e^{-NV(l)/2} \quad (4.78)$$

y  $\{a_n, a_m^\dagger\} = \delta_{nm}$ .

Los correladores en el modelo de matrices  $N \times N$  pueden obtenerse calculando correladores en el mar de Fermi definido por

$$a_n |N\rangle = 0 \quad n \geq N \quad (4.79)$$

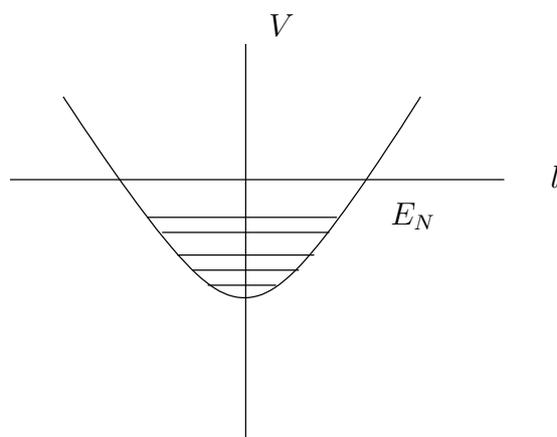
$$a_n^\dagger |N\rangle = 0 \quad n < N \quad (4.80)$$

Para demostrar esto vamos a definir el operador

$$O_{l^n} = \int dl \Psi^\dagger(l) l^n \Psi(l) \quad (4.81)$$

ya que es fácil ver que

$$\langle \prod_i \text{tr} M^{n_i} \rangle = e^{-Z} \int dM \prod_i \text{tr} M^{n_i} e^{-N \text{tr} V(M)} = \langle N | \prod_i O_{l^{n_i}} | N \rangle \quad (4.82)$$



Fermiones libres en un potencial  $V$ . Con  $N$  fermiones llenamos los  $N$  niveles mas bajos para construir el “vacío”  $|N\rangle$ .

y también que en este formalismo

$$W(L) = \frac{1}{N} O_{e^{\pm L}} \quad (4.83)$$

$$R(x) = O_{\frac{1}{x-1}} \quad (4.84)$$

### 4.3.1. Distribuciones de autovalores

El teorema de Wick nos dice que todos los correladores pueden escribirse en términos de la función de Green a dos fermiones

$$G_N^{(2)}(l_1, l_2) = \langle N | \Psi^\dagger(l_1) \psi(l_2) | N \rangle \quad (4.85)$$

Esto implica que para definir correctamente el límite continuo debemos estudiar el comportamiento de  $G_N^{(2)}(l_1, l_2)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . La parte diagonal de  $G_N^{(2)}$  es la densidad de autovalores

$$\rho(l) = G_N^{(2)}(l, l) \quad (4.86)$$

ya que si definimos  $\rho(l)$  como la probabilidad de encontrar un autovalor  $l$  entonces es sencillo demostrar que

$$G_N^{(2)}(l, l) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(l - l_i) \right\rangle \quad (4.87)$$

$G_N^{(2)}$  tendrá soporte en un intervalo  $I$  (o una unión de intervalos en casos mas complicados). Para estudiar la densidad de autovalores lo mas sencillo es considerar correladores del resolvente  $R(x)$ . De la definición del resolvente vemos que solo estará bien definido fuera del eje real ya que  $M$  tiene autovalores reales. La discontinuidad de  $R(x)$  en el eje real será la densidad de autovalores. La solución para la ecuación cuadrática para  $\langle R(x) \rangle_{h=0}$  nos muestra que las raíces definen puntos de ramificación para  $\langle R(x) \rangle_{h=0}$ , y como  $\rho(l)$  es la discontinuidad de  $\langle R(x) \rangle_{h=0}$ , el soporte de la densidad de autovalores a genus cero sera un intervalo o una unión de intervalos.

Para el caso Gaussiano con  $V(M) = M^2/2$  el resolvente es

$$\langle R(x) \rangle_{h=0} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 2}) \quad (4.88)$$

lo que nos da una densidad de autovalores

$$\rho(l) = G_N^{(2)}(l, l) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{2 - l^2} \theta(2 - l^2) \quad (4.89)$$

Que el soporte de las funciones a dos fermiones sea finito tiene importantes consecuencias en el comportamiento no analítico en  $x$ . Si consideramos la función a un punto

$$\langle R(x) \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M} \right\rangle = \frac{1}{N} \int_I dl \frac{G_N^{(2)}(l, l)}{x - l} \quad (4.90)$$

vemos que la dependencia no analítica en  $x$  viene de las contribuciones en la integral en  $l$  en el borde del intervalo  $I$ . Estas contribuciones no analíticas son precisamente las partes universales, que son las que nos interesan en el límite continuo. El comportamiento no analítico aparece cuando llegamos al borde de la distribución de autovalores.

En el ejemplo del modelo Gaussiano si  $x = x_c + \delta x = \sqrt{2} + \delta x$  encontramos para la densidad de autovalores una función no analítica  $(\delta x)^{1/2}$  que corresponde a una amplitud de loop  $\langle W(L) \rangle \sim L^{-3/2}$ .

### 4.3.2. Superficies de Fermi y Límite Continuo

Si utilizamos la relación de recurrencia

$$l\psi_n = \sqrt{r_{n+1}}\psi_{n+1} + \sqrt{r_n}\psi_{n-1} \quad (4.91)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle N | \Psi^\dagger(l_1) \Psi(l_2) | N \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(l_1) \psi_n(l_2) \\ &= \frac{\sqrt{r_{N+1}} \psi_{N+1}(l_1) \psi_N(l_2) - \psi_{N+1}(l_2) \psi_N(l_1)}{l_1 - l_2} \end{aligned} \quad (4.92)$$

con lo que basta estudiar el límite continuo de las funciones de onda ortonormales por si solas para analizar el límite continuo de  $G_N^{(2)}(l_1, l_2)$ .

Recordemos que tomar el límite continuo en estos modelos cerca de un punto crítico de orden  $m$  consiste en tomar

$$\frac{n}{N} \rightarrow 1 - a^2(\mu - \mu_F) \quad (4.93)$$

$$Na^{2+1/m} = \kappa^{-1} \quad (4.94)$$

$$r_n \rightarrow r_c + a^{2/m}u(\mu) \quad (4.95)$$

$$a \rightarrow 0 \quad (4.96)$$

Las relaciones de recurrencia nos dicen que las funciones  $\psi$  tiene un límite bien definido cerca del borde de la distribución de autovalores  $l_c$

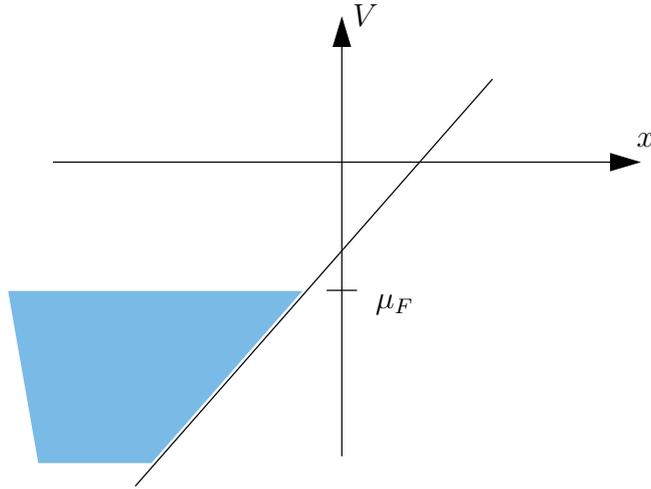
$$\psi_n(l_c + a^{2/m}x) \rightarrow a^w \psi(\mu, x) \quad (4.97)$$

donde  $a^w$  es un factor de normalización y  $\psi$  es autofunción del operador de Lax

$$Q\psi = (\kappa^2 d^2 - u)\psi = x\psi \quad (4.98)$$

A esta función  $\psi$  se le da el nombre de función de Baker-Akhiezer asociada a los operadores de Lax. Es fácil ver que la acción de  $P$  sobre la función de Baker-Akhiezer es

$$P\psi = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.99)$$



El límite continuo se define haciendo un zoom en el borde de la distribución de autovalores.

Pasemos a estudiar en esta formulación el ejemplo Gaussiano con  $V(M) = M^2$  y función de partición

$$e^Z = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} \quad (4.100)$$

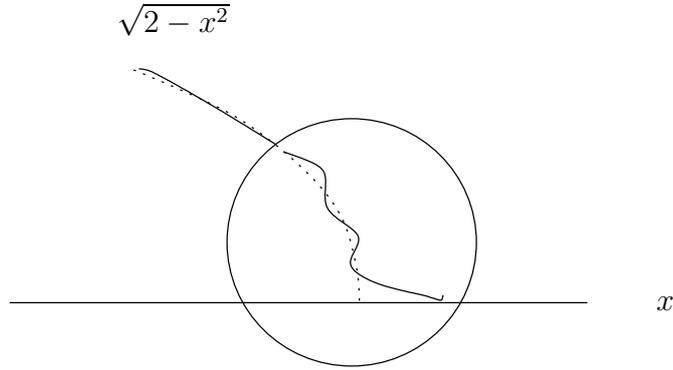
Para este potencial las funciones de onda ortonormales son

$$\psi_n(l) = \frac{N^{1/4}}{2^{n/2} \pi^{1/4} \sqrt{n!}} H_n(\sqrt{N}l) e^{-Nl^2/2} \quad (4.101)$$

donde  $H_n$  son los polinomios de Hermite con representación integral

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x + it)^n e^{-t^2} \quad (4.102)$$

Si utilizamos la aproximación de fases estacionarias, encontraremos dos puntos estacionarios para  $l^2 \neq 2$ . Para  $l^2 < 2$  nos encontramos con una función oscilante mientras que para  $l^2 > 2$  la función de onda es cero a todos los ordenes en la expansión en  $1/N$ . La región que mas nos interés es aquella en la que  $l$  esta infinitesimalmente cerca de  $\pm\sqrt{2}$ , que corresponde al borde de la distribución de autovalores. En ese punto, los dos puntos de fase estacionaria se juntan y si hacemos simultáneamente  $N \rightarrow \infty$  y  $l \rightarrow l_c = \sqrt{2}$



El límite continuo revela una estructura en el borde de la distribución de autovalores.

podemos encontrar un límite bien definido que capture la contribución de la distribución de autovalores en el borde. Para este caso

$$Na^3 = \kappa^{-1} \quad \frac{n}{N} = 1 - a^2\mu \quad l = \sqrt{2}(1 + a^2x) \quad (4.103)$$

donde tomamos  $a \rightarrow 0$  dejando  $\mu, \kappa, x$  fijos. Nos encontramos

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{1/2} \psi_n(l) = \frac{\kappa^{-1/6}}{\pi 2^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{it\kappa^{-2/3}(x+\mu) + it^3/3} \quad (4.104)$$

que puede escribirse en términos de la función de Airy como

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{1/2} \psi_n(l) = \frac{1}{\kappa^{1/6} 2^{1/4}} Ai\left(\frac{x + \mu}{\kappa^{2/3}}\right) \quad (4.105)$$

luego el límite continuo de los polinomios de Hermite en el modelo Gaussiano es la función de Airy. El borde de la distribución de autovalores esta en  $\nu = 0$  y esta viene dada por

$$\rho(l) = (Ai')^2 - l\kappa^{-2/3}(Ai)^2 \quad (4.106)$$

El comportamiento asintótico de esta función viene dado por

$$\rho(l) \sim \frac{\pi}{4} l^{1/4} e^{-2l^{3/2}/3\kappa} \quad l \rightarrow +\infty \quad (4.107)$$

$$\sim \pi(-l)^{1/2} \quad l \rightarrow -\infty \quad (4.108)$$

Vamos ahora a volver al caso general y a considerar el comportamiento de la función de Green a dos fermiones en la región cerca del borde de la densidad de autovalores

$$G(l_c + a^{2/m}x_1, l_c + a^{2/m}x_2) \rightarrow a^{-2/m}G_c(x_1, x_2) \quad (4.109)$$

donde

$$G_c = \int_{\mu_F}^{\infty} d\mu \psi(\mu, x_1) \psi(\mu, x_2) \quad (4.110)$$

Para demostrar esto basta ver que el límite continuo de

$$\begin{aligned} & \langle N | \Psi^\dagger(l_1) \Psi(l_2) | N \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(l_1) \psi_n(l_2) \\ & = \sqrt{r_{n+1}} \frac{\psi_{N+1}(l_1) \psi_N(l_2) - \psi_{N+1}(l_2) \psi_N(l_1)}{l_1 - l_2} \end{aligned} \quad (4.111)$$

es

$$G_c = \frac{\psi(\mu_F, x_1)' \psi(\mu_F, x_2) - \psi(\mu_F, x_2)' \psi(\mu_F, x_1)}{x_1 - x_2} \quad (4.112)$$

Si en esta expresión tomamos la derivada con respecto a  $\mu_F$  encontramos

$$\partial_{\mu_F} G_c = -\psi(\mu_F, x_1) \psi(\mu_F, x_2) \quad (4.113)$$

que tras integrar de nuevo nos da (4.110). Las contribuciones no analíticas viene de la contribución de la integral sobre  $l$  cerca del borde de la distribución de autovalores. Para estudiar esto podemos usar una teoría de fermiones con expansión

$$\Psi(x) = \int d\mu a(\mu) \psi(\mu, x) \quad (4.114)$$

donde  $\psi(\mu, x)$  es la autofunción del operador de Lax  $Q$  (la función de Baker-Akhiezer). Dicha función es entera en  $x$ , tiene un comportamiento oscilante para  $x \rightarrow -\infty$  y debe decaer exponencialmente para  $x \rightarrow +\infty$ . Puede verse [82] que esta última condición solo es cierta cuando el punto crítico del modelo de matrices asociado es de grado impar, por lo que podemos decir que los modelos de una sola matriz con un punto crítico de grado par no tiene un límite continuo bien definido en dicho punto crítico. Si tomamos como definición

de cuerdas no perturbativas el límite continuo del modelo de matrices asociado, podríamos decir que las cuerdas asociadas a estos puntos críticos inestables no tiene una extensión no perturbativa.

Los osciladores satisfacen

$$a(\mu)|\mu_F\rangle = 0 \quad \mu < \mu_F \quad (4.115)$$

$$a^\dagger(\mu)|\mu_F\rangle = 0 \quad \mu > \mu_F \quad (4.116)$$

$$\{a(\mu), a^\dagger(\mu')\} = \delta(\mu - \mu') \quad (4.117)$$

En particular amplitudes de Loops en el continuo pueden obtenerse usando el límite continuo del operado de creación de loops macroscópicos en el modelo de matrices

$$W(L) = \int dx e^{xL} \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \quad (4.118)$$

Aunque estamos integrando  $x$  en todo el eje real la integral es convergente. Si estudiamos en detalle el comportamiento asintótico de la función de Baker-Akhiezer se ve que decae exponencialmente como  $e^{-x^{m+1/2}/\kappa}$  (para  $m$  impar) fuera de la región de soporte clásico de la densidad de autovalores y que es oscilante dentro de dicha región pero con un crecimiento de tipo algebraico, lo que permite que la integral exista. Para  $m$  par la función de Baker-Akhiezer es exponencialmente creciente fuera de la región clásica por lo que la integral anterior no existe.



# Capítulo 5

## La Geometría de la Cuerda Minimal

Hasta este momento, el único espacio que estamos considerando es el de la hoja de mundo de la cuerda, sin preocuparnos de sobre que espacio se están moviendo las cuerdas. En este capítulo vamos a intentar analizar la geometría del espacio ambiente para estas cuerdas minimales. Para definir este espacio utilizaremos el móduli de las diferentes branas que aparecen en la teoría, ya que con ello capturamos directamente los efectos no perturbativos que puedan aparecer.

### 5.1. Superficie Auxiliar $X_{p,q}$

Para empezar este estudio vamos a considerar la integral funcional en el disco sin ningún operador insertado con condiciones de frontera tipo FZZT en la frontera del disco  $\Phi$ . Dicho correlador dependerá de las constantes cosmológicas tanto en la frontera como en el interior del disco  $\mu_B$  y  $\mu$ . Si derivamos con respecto a  $\mu$  tenemos

$$\partial_\mu \Phi = \langle c\bar{c}V_{2b} \rangle_{\mu_B} \quad (5.1)$$

que puede calcularse fácilmente con lo que ya sabemos (usando  $p = i(-2b + Q)$ )

$$\partial_\mu \Phi = \frac{1}{2(b^2 - 1)} \mu^{1/2b^2} \cosh(b - 1/b)\pi\sigma \quad (5.2)$$

donde nos hemos olvidado de la dependencia en el estado de materia ya que este es independiente de las constantes cosmológicas y hemos fijado cierta normalización para  $\Phi$ . Si integramos esta expresión con respecto a  $\mu$  tenemos

$$\Phi = \frac{b^2}{b^4 - 1} \mu^{(1+1/b^2)/2} (b^2 \cosh \pi b \sigma \cosh \pi \sigma / b - \sinh \pi b \sigma \sinh \pi \sigma / b) \quad (5.3)$$

Por último, podemos diferenciar esta expresión con respecto a  $\mu_B$  con lo que tenemos

$$\partial_{\mu_B} \Phi = \mu^{1/2b^2} \cosh \pi \sigma / b \quad (5.4)$$

De forma similar podemos considerar la FZZT definida en términos de los parámetros duales  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\mu}_B$ . En términos de  $\sigma$  la constante cosmológica dual de frontera queda

$$\hat{\mu}_B^2 = \hat{\mu} \cosh^2 \pi \sigma / b \quad (5.5)$$

Puede demostrarse [9,11–13] que todos los observables de la teoría son invariante bajo  $b \rightarrow 1/b$ , cambiando las constantes cosmológicas por sus duales. Por tanto la brana dual nos da una descripción completamente equivalente de las condiciones de frontera de tipo FZZT. En cambio, la función  $\Phi$  no es invariante bajo esta dualidad. Si hacemos las transformaciones nos encontramos con la función dual

$$\hat{\Phi} = \frac{b^2}{1 - b^4} \mu^{(b^2+1)/2} \left( \frac{1}{b^2} \cosh \pi b \sigma \cosh \pi \sigma / b - \sinh \pi b \sigma \sinh \pi \sigma / b \right) \quad (5.6)$$

donde  $\hat{\Phi} \neq \Phi$  aunque las funciones a un punto si son invariantes bajo la dualidad. Si derivamos con respecto a  $\hat{\mu}_B$  tenemos

$$\partial_{\hat{\mu}_B} \hat{\Phi} = \hat{\mu}^{b^2/2} \cosh \pi b \sigma \quad (5.7)$$

Hasta el momento no hemos usado que  $b^2 = p/q$ . Vamos a ver que pasa cuando esto ocurre (estamos considerando la cuerda minimal  $M_{p,q}$ ). Para empezar definamos las variables

$$x = \frac{\mu_B}{\sqrt{\mu}} \quad y = \frac{\partial_{\mu_B} \Phi}{\sqrt{\hat{\mu}}} \quad (5.8)$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{\mu}_B}{\sqrt{\hat{\mu}}} \quad \hat{y} = \frac{\partial_{\hat{\mu}_B} \hat{\Phi}}{\sqrt{\hat{\mu}}} \quad (5.9)$$

Las expresiones para las derivadas con respecto a las constantes cosmológicas de frontera de las amplitudes en el disco  $\Phi$  y  $\hat{\Phi}$  pueden escribirse ahora como ecuaciones en estas nuevas variables

$$F(x, y) = T_q(x) - T_p(y) = 0 \quad (5.10)$$

$$\hat{F}(\hat{x}, \hat{y}) = T_p(\hat{x}) - T_q(\hat{y}) = 0 \quad (5.11)$$

Si pensamos en  $x$  e  $y$  como coordenadas complejas, nos encontramos con una superficie de Riemann  $X_{p,q}$  definida por  $F = 0$ . Al cumplirse  $\hat{F}(x, y) = F(y, x)$  se ve que la brana dual da lugar a la misma superficie de Riemann. De las identidades anteriores es trivial ver que  $\hat{x} = y$  y que  $\hat{y} = x$ .

Queremos interpretar esta superficie como la geometría asociada a las cuerdas minimales. Las definiciones que hemos dado de  $\hat{y}$  e  $y$  implican que podemos pensar en la amplitud en el disco como integrales de uno-formas sobre  $X_{p,q}$

$$\Phi = \mu^{\frac{p+q}{2p}} \int_{x_0}^x y dx \quad (5.12)$$

$$\hat{\Phi} = \hat{\mu}^{\frac{p+q}{2q}} \int_{y_0}^y x dy \quad (5.13)$$

donde  $x_0$  e  $y_0$  son puntos arbitrarios sobre la superficie (esto tiene en cuenta la ambigüedad asociada a que solo sabemos calcular  $\partial_\mu \Phi$ ). El que  $\Phi \neq \hat{\Phi}$  nos dice simplemente que  $x dy$  e  $y dx$  son formas diferentes de  $X_{p,q}$ . Aunque no sean de la misma forma, si es cierto que solo difieren en una forma exacta (esto refleja que los observables si son invariantes bajo la dualidad)

$$y dx + x dy = d(xy) \quad (5.14)$$

por tanto, tanto la brana FZZT como su dual describen la misma física.

Si interpretamos  $\int y dx$  y  $\int x dy$  como potenciales efectivos  $U_{eff}(x)$  y  $\hat{U}_{eff}(y)$ , integrando la ecuación anterior vemos que los potenciales están relacionados mediante una transformación de Legendre

$$U_{eff}(x) = xy - \hat{U}_{eff}(y) \quad (5.15)$$

Con lo que se ve que  $x$  e  $y$  se comportan como una coordenada y su momento conjugado en la superficie de Riemann.

El parámetro  $z$  que definimos en el capítulo tres también tiene una interpretación geométrica clara. al estar  $z$  relacionado con las coordenadas de nuestra superficie mediante

$$x = T_p(z) \quad y = T_q(z) \quad (5.16)$$

podemos interpretar  $z$  como el parámetro de uniformización de la superficie  $X_{p,q}$ . Dicho parámetro de uniformización presenta problemas en ciertos puntos, en los que dos valores de  $z$  corresponden a un único valor de  $(x, y)$ . En estos puntos la superficie de Riemann es singular y podemos pensar en ellos como ciclos de tipo  $A$  en la homología de la superficie que hemos llevado a volumen nulo. Estas singularidades corresponden a los puntos de la superficie

$$x_{m,n} = (-)^m \cos \pi n p / q \quad (5.17)$$

$$y_{m,n} = (-)^n \cos \pi m q / p \quad (5.18)$$

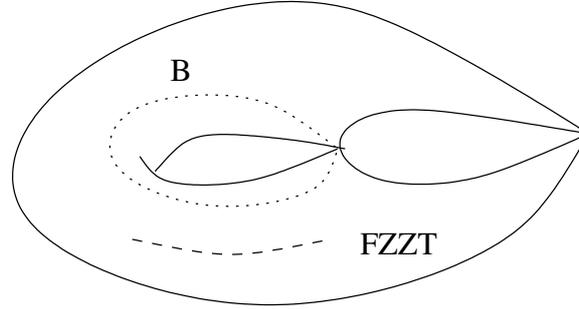
que viene del par de valores de  $z$

$$z_{m,n}^{\pm} = \cos \frac{\pi(mq \pm np)}{pq} \quad (5.19)$$

donde  $m = 1 \dots p-1$ ,  $n = 1 \dots q-1$  y  $mq - np > 0$ . Con lo que tenemos  $(p-1)(q-1)/2$  puntos singulares en la superficie. Estas singularidades pueden encontrarse directamente de la ecuación de la curva resolviendo las ecuaciones usuales  $F = \partial_x F = \partial_y F = 0$ .

Fijándonos en estas singularidades es fácil dar una interpretación geométrica para las branas de tipo  $ZZ$ . Se ve que las singularidades nos reproducen las posibles posiciones de las branas  $ZZ$  en la superficie de Riemann  $X_{p,q}$ . Por tanto, las branas  $ZZ$  principales están localizadas en las singularidades de la superficie.

El que podamos escribir los estados de  $ZZ$  como diferencias de estados de  $FZZT$  también tiene una interpretación geométrica. Si pensamos en las branas  $FZZT$  como integrales de



Superficie de Riemann para el modelo (2, 5).

línea de uno-formas en la superficie, podemos pensar en las branas  $ZZ$  como integrales sobre ciclos cerrados de la superficie que pasan por el punto singular. Si la singularidad corresponde a un ciclo de tipo  $A$  en la homología de la superficie entonces la amplitud de la brana  $ZZ$  será una integral sobre el ciclo  $B$  conjugado de  $A$ .

$$\Phi_{ZZ} = \mu^{\frac{p+q}{2p}} \int_B y dx \quad (5.20)$$

### 5.1.1. Cortes de Ramificación y Superficies de Riemann

La aparición de la superficie de Riemann tiene su origen en que la amplitud en el disco de la brana  $FZZT$  es una función multivaluada en  $\mu_B$ . Si consideramos  $\mu_B$  como una coordenada (compleja) en el móduli está claro por las relaciones anteriores que  $\partial_{\mu_B} \Phi$  es una función multivaluada en el plano complejo definido por  $\mu_B$ . Esta multivaluación implica que en el plano complejo  $\mu_B$  aparecen cortes de ramificación que caracterizan cierta superficie. Por tanto para definir correctamente la amplitud de la brana  $FZZT$  como función del moduli debemos considerar que  $\mu_B$  es la coordenada en una superficie de Riemann definida por  $F(x, y) = 0$ . De esta ecuación se ve que el número de hojas de la superficie viene determinado por  $p$ . Para el caso  $p = 2$  tenemos que la ecuación que define la superficie de Riemann es

$$y = \pm \sqrt{\frac{1 + T_q(x)}{2}} \quad (5.21)$$

que en el plano complejo  $x$  puede verse como una línea de ramificación del tipo raíz cuadrada que se extiende desde  $-\infty$  hasta hasta el cero mas pequeño de  $1 + T_q(x)$  que corresponde a  $x = -1^1$ . El resto de soluciones de  $1 + T_q(x) = 0$  son puntos de ramificación aislados y corresponden a singularidades en la superficie de Riemann. Al ser  $T_q$  un polinomio de grado  $q$  el número de estas singularidades es  $q - 1$  que nos fija el genus de la superficie. La resolución de las singularidades en el plano complejo  $x$  se ve como abrir líneas de ramificación de tamaño finito donde antes teníamos puntos singulares aislados, que es equivalente a dar un tamaño finito a los ciclos  $A$  en la homología de la superficie.

## 5.2. Superficie Auxiliar y Modelos de Matrices

La descripción en términos de modelos de matrices surge de forma natural si pensamos en la superficie  $X_{p,q}$ . La brana FZZT corresponde al operador de loop macroscópico en el modelo matricial donde  $x$  parametriza los autovalores de la matriz e  $y$  representa al resolvente. La estructura analítica de la superficie determina el comportamiento crítico del modelo de matrices.

Para describir los modelos minimales de tipo  $(p, q)$  pueden usarse varias representaciones en términos de matrices [34, 35, 83–89]. Aquí nos centraremos en la llamada modelo de dos matrices [89]. Dicho modelo corresponde a dos matrices hermíticas aleatorias  $N \times N$  que denotaremos por  $X$  e  $Y$ . La función de partición es

$$Z_m = \int dX dY e^{-\frac{N}{g} \text{tr}(V_1(X) + V_2(Y) - XY)} \quad (5.22)$$

En el límite planar  $N \rightarrow \infty$  los autovalores de  $X$  e  $Y$  son descritos por distribuciones continuas que pueden determinarse usando la estructura de la superficie  $X_{p,q}$ . Por poner un ejemplo, para  $p = 2$  la superficie corresponde a un recubrimiento doble del plano complejo, con los autovalores localizados en las líneas de ramificación de la superficie.

---

<sup>1</sup>Con una elección adecuada de fases por supuesto.

En estos modelos de dos matrices los resolventes se definen

$$R(x) = \text{tr} \frac{1}{X - x} \quad (5.23)$$

$$\hat{R}(y) = \text{tr} \frac{1}{Y - y} \quad (5.24)$$

Estos resolventes pueden calcularse para los modelos minimales de tipo  $(p, q)$  [34, 35, 83–86]

$$R(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{q/p} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{q/p} \quad (5.25)$$

$$\hat{R}(y) = (y + \sqrt{y^2 - 1})^{p/q} + (y - \sqrt{y^2 - 1})^{p/q} \quad (5.26)$$

Es fácil ver que  $y = R(x)$  y que  $x = \hat{R}(y)$ , y que estas relaciones son equivalentes a  $T_p(y) - T_q(x) = 0$  que es la ecuación que define nuestra superficie  $X_{p,q}$ . Por tanto identificamos el autovalor  $x$  con la constante cosmológica de frontera y los loops macroscópicos con la brana FZZT y su dual. El que solo existan estos dos tipos de loops macroscópicos es consistente con el hecho de que solamente existen dos tipos de branas FZZT (relacionadas por dualidad).

El identificar las coordenadas  $(x, y)$  de la superficie de Riemann con los autovalores de  $X$  e  $Y$  nos indica un modo para avanzar mas allá del nivel árbol en la cuerda minimal. En la sección anterior mostramos que en cierto sentido las variables  $(x, y)$  son un par de variables conjugadas. Esto resulta natural en el modelo de matrices ya que cuando hacemos el límite continuo ambos conjuntos de autovalores devienen en operadores diferenciales [43] que satisfacen

$$[Q, P] = \kappa \quad (5.27)$$

En la sección siguiente desarrollaremos mas estas ideas, que en principio nos permitirían cuantizar la geometría  $X_{p,q}$ . Ya que la estructura analítica de  $y$  como función de  $x$  era precisamente lo que nos definía la superficie de Riemann (en la aproximación del disco) podemos dar una definición exacta de dicha superficie utilizando la identificación con el modelo de matrices. En el contexto matricial resulta posible calcular cual es la estructura de cortes de ramificación de  $y$  como función de  $x$  mas allá del nivel árbol, ya que el límite

continuo es capaz de reproducir la expansión en genus de la teoría de cuerdas. Una vez calculado el resolvente exacto en el límite continuo, mirando su estructura de cortes de rama tenemos la estructura cuántica de la geometría en la que estas cuerdas se mueven. Como veremos, la modificación es muy importante, ya que a nivel exacto vamos a encontrar que la amplitud de la brana FZZT es una función univaluada en  $x$  con lo que no aparece ninguna superficie de Riemann y la geometría del móduli se reduce al plano complejo. La aparición de cortes de ramificación en el límite clásico está relacionado con lo que se conoce como fenómeno de Stokes que estudiaremos más adelante.

En esta memoria vamos a discutir exclusivamente modelos con  $p = 2$  que en términos de modelos matriciales pueden estudiarse utilizando modelos de una sola matriz. Para modelos del tipo  $(2, q)$  la curva viene dada por

$$2y^2 = T_q(x) + 1 \quad (5.28)$$

y el potencial efectivo  $V_{eff}(x)$  para los autovalores se obtiene integrando  $y$  con respecto a  $x$ . El modelo de matrices asociado tiene una sola línea de ramificación situada en el eje real del plano  $x$  entre  $x = -\infty$  y  $x = -1$  como ya vimos, y ciertos puntos de ramificación aislados.

Usando el potencial efectivo podemos tener una imagen más física de las branas ZZ en el modelo de matrices. Las singularidades de la superficie corresponden a puntos en los que  $y = T'_q(x) = 0$ . Esto en términos del potencial efectivo significa que las singularidades son máximos o mínimos del potencial efectivo. Por tanto, podemos interpretar las branas ZZ como autovalores del modelo de matrices localizados en puntos extremos del potencial efectivo. Para crear branas ZZ debemos mover autovalores fuera de la línea de ramificación (que identificamos con el mar de Fermi del modelo de matrices).

Es importante darse cuenta de que los extremos del potencial efectivo donde situamos las branas ZZ no son necesariamente máximos del mismo. Es fácil ver que las branas ZZ de tipo  $(1, n)$  están situadas en mínimos del potencial para  $n$  par y en máximos para  $n$

impar. En esos puntos el potencial toma valores

$$V_{eff}(x_n) \sim (-)^{n+1} \sin \frac{2\pi n}{q} \quad (5.29)$$

mientras que el nivel de Fermi esta situado en  $V_{eff} = 0$ . Por tanto, si hacemos caso a la fórmula anterior, todos los mínimos del potencial están situados por debajo del nivel de Fermi, lo que introduce una inestabilidad en estos modelos al poder darse procesos de efecto túnel que hagan que un conjunto de autovalores del mar de Fermi decaigan a estos mínimos.

### 5.3. Geometría Cuántica

En esta sección vamos a estudiar que le ocurre a la geometría de la superficie cuando ponemos a funcionar las correcciones cuánticas. Para hacer esto vamos a centrarnos en la descripción de la teoría como modelo de matrices que nos permitirá capturar estas correcciones en el límite continuo.

Como ya hemos visto, las cuerdas minimales de tipo  $(2, q)$  tienen una descripción dual en términos de un modelo de una sola matriz hermítica  $M$ , con función de partición

$$Z = \int dM e^{-NtrV(M)} \quad (5.30)$$

En el modelo de matrices el loop macroscópico corresponde al valor esperado

$$\langle W(x) \rangle = \langle \frac{1}{N} tr \log(x - M) \rangle \quad (5.31)$$

que en el límite continuo corresponde a la amplitud en el disco  $\Phi$ . y el resolvente  $R(x) = \partial_x W(x)$  corresponde a la coordenada  $y$  de la curva auxiliar y  $x$  corresponde a la constante cosmológica de frontera (como vimos en la sección anterior). La amplitud completa para la brana FZZT no corresponde solamente a la amplitud del disco, ya que debemos sumar todas las contribuciones de hojas de mundo con un número arbitrario de fronteras. En el contexto

del modelo de matrices esto puede implementarse exponenciando el loop macroscópico con lo que tenemos que la amplitud completa para la brana FZZT vendría dada por

$$e^{NW(x)} = \det(x - M) \quad (5.32)$$

en la descripción matricial.

En el modelo matricial podemos calcular el valor esperado de esta cantidad y se obtiene

$$\langle \det(x - M) \rangle = P_N(x) \quad (5.33)$$

donde  $P_i(x)$  son los polinomios ortogonales asociados al modelo de matrices que estemos considerando.

### 5.3.1. Límite Continuo

Vamos ahora a tomar el límite continuo ( $N \rightarrow \infty$ ) de las expresiones anteriores para recuperar los correladores de branas en los modelos minimales de tipo  $(2, q)$ . Vamos a centrarnos en el caso de una única brana. Para tener un límite bien definido no debemos considerar solo el determinante [90] sino

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} e^{-NV(x)/2} \det(x - M) \quad (5.34)$$

donde  $V$  es el potencial del modelo de matrices y  $h_N$  es la constante de normalización del polinomio ortogonal  $P_N$ . La función de partición para la FZZT brana en el límite continuo vendrá dada por una función de  $x$  y la constante cosmológica  $\mu$

$$\langle \Psi(x) \rangle = \langle \psi(x, \mu) \rangle \quad (5.35)$$

que vendrá caracterizada por la condición de que debe cumplir

$$Q\psi = x\psi \quad P\psi = \kappa \partial_x \psi \quad (5.36)$$

donde  $P \sim \kappa^q d^q + \dots$  y  $Q \sim \kappa^2 d^2 + \dots$  los operadores de Lax asociados con el modelo de matrices. Aquí  $d = \partial_\mu$  y los operadores deben cumplir

$$[Q, P] = \kappa \quad (5.37)$$

como ya estudiamos. Estas ecuaciones diferenciales sobre  $\psi$  no determinan la función de manera unívoca. En los modelos que tengan una definición no perturbativa consistente la función se determina imponiendo decaimiento exponencial para  $x$  muy grande. En los modelos que no admiten una definición no perturbativa no es posible imponer esta última condición. La función  $\psi$  es conocida como la función de Baker-Akhiezer de la jerarquía integrable definida por  $P$  y  $Q$ . Una de las propiedades de esta función es que es entera en  $x$  (no presenta puntos de ramificación). Por tanto, el valor esperado del determinante es una función entera en  $x$ .

### 5.3.2. El resolvente y su Estructura Analítica

Sabemos que el valor esperado del determinante es una función entera de  $x$ . Veamos que ocurre en el caso del resolvente definido por

$$R(x) = \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{x - M} \rangle \quad (5.38)$$

Usando la expresión para el determinante, es fácil deducir una expresión para el resolvente en términos de polinomios ortogonales

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\rho_N(l)}{x - l} \quad (5.39)$$

donde

$$\rho_N(l) = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{h_N}{h_{N-1}}} (\psi_{N-1}(l) \psi'_N(l) - \psi'_{N-1}(l) \psi_N(l)) \quad (5.40)$$

y  $\psi_k = \frac{1}{\sqrt{h_k}} e^{-NV/2} P_k$  son las funciones ortogonales del modelo matricial y las primas indican derivadas con respecto a  $l$ . Cuando tomamos el límite continuo, la función de onda  $\psi_N$  deviene en la función de Baker-Akhiezer  $\psi(x, \mu)$ . Por tanto, el resolvente exacto es

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\rho_\kappa(l)}{x - l} \quad (5.41)$$

con

$$\rho_\kappa(l) \sim \kappa^2 (\partial_\mu \psi(l, \mu) \partial_l \psi(l, \mu) - \psi(l, \mu) \partial_\mu \partial_l \psi(l, \mu)) \quad (5.42)$$

De estas expresiones, podemos definir  $\rho_\kappa$  como la distribución cuántica de autovalores.

Al ser la función de Baker-Akhiezer entera en  $l$  el resolvente sera analítico en todas partes salvo en el eje real, donde tendrá una discontinuidad

$$R(x + ie) - R(x - ie) = 2\pi i \rho_\kappa(x) \quad (5.43)$$

Este hecho, contrasta con la situación clásica, en la que el resolvente presentaba una discontinuidad semi-infinita. Esta nueva situación nos permite definir dos resolventes  $R_+$  y  $R_-$  que se obtienen continuando analíticamente  $R(x)$  al eje real, partiendo del semiplano superior o del semiplano inferior

$$R_\pm(x) = \int_{C_\pm} dl \frac{\rho_\kappa(l)}{x - l} \quad (5.44)$$

con lo que tenemos que  $R = R_+$  cuando  $Imx > 0$  y  $R = R_-$  cuando  $Imx < 0$  y se cumple

$$R_+ - R_- = 2\pi i \rho_\kappa \quad (5.45)$$

para todo el plano complejo  $x$ . Tanto  $R_+$  como  $R_-$  son funciones enteras en  $x$ .

Consideremos ahora el límite clásico. En este límite el resolvente debe reducirse al resolvente clásico, con un corte semi-infinito a lo largo del eje real. Es trivial ver que  $R_+$  tiene el límite clásico apropiado para  $x$  en el semiplano superior y el límite clásico viene dado por  $R_-$  cuando  $x$  esta en el semiplano inferior. Continuando analíticamente los límites clásicos así obtenidos encontraremos el corte de ramificación y la segunda hoja de la superficie de Riemann. Es importante notar que debemos tomar primero el límite clásico, para después continuar analíticamente. Si lo hacemos al revés, nunca veremos la linea de ramificación, ya que tanto  $R_+$  como  $R_-$  son funciones enteras de  $x$ .

Por tanto, es imposible definir globalmente el resolvente dada la discontinuidad en el eje real, pero podemos definir mediante continuación analítica un par de resolventes que son funciones enteras en  $x$ . Por tanto, cuando uno tiene en cuenta los efectos no perturbativos la superficie de Riemann desaparece y se ve reemplazada por el plano complejo.

Para recuperar la superficie, debemos primero tomar el límite clásico y después continuar analíticamente.

## 5.4. El Modelo Gaussiano

Para ver como funcionan todas estas ideas, vamos a considerar el ejemplo mas sencillo que consiste en el modelo (2, 1). Esta teoría corresponde a la llamada gravedad topológica [91–93] y desde un punto de vista matricial corresponde al modelo Gaussiano. Dicho modelo de matrices puede representarse por

$$e^{Z(g)} = \int dM e^{-N \text{tr} M^2/g} \quad (5.46)$$

donde  $M$  es una matriz hermítica  $N \times N$ . La presencia de una brana FZZT puede representarse por

$$\langle \det(x - M) \rangle = e^{-Z} \int dM \det(x - M) e^{-N \text{tr} M^2/g} \quad (5.47)$$

que puede escribirse como una integral sobre  $N$  fermiones  $\chi$

$$e^{-Z} \int dM d\chi d\chi^\dagger e^{\chi^\dagger(x-M)\chi - N \text{tr} M^2/g} = \int d\chi d\chi^\dagger e^{x\chi^\dagger\chi - g(\chi^\dagger\chi)^2/N} \quad (5.48)$$

que puede transformarse finalmente en

$$\langle \det(x - M) \rangle = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{g\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds (x + is)^N e^{-Ns^2/g} = \left(\frac{g}{4N}\right)^{N/2} H_N\left(\frac{x\sqrt{N}}{\sqrt{g}}\right) \quad (5.49)$$

donde  $H_N$  son los polinomios de Hermite (el conjunto de polinomios ortogonales del modelo Gaussiano).

En el límite de  $N$  muy grande con  $g \sim 1/N$  los autovalores de la matriz  $M$  están localizados en el intervalo  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  del eje real. El límite continuo corresponde con hacer un zoom al final de la distribución de autovalores poniendo en el mismo punto los dos mínimos del exponente de la integral. Para parametrizar el límite continuo en este caso

podemos usar

$$x \rightarrow \sqrt{2}\left(1 + \frac{a^2}{2}x\right) \quad (5.50)$$

$$g \rightarrow 1 - a^2\mu \quad (5.51)$$

$$s \rightarrow (i - as\kappa^{1/3})/\sqrt{2} \quad (5.52)$$

$$N \rightarrow a^{-3}\kappa^{-1} \quad (5.53)$$

$$a \rightarrow 0 \quad (5.54)$$

y  $\mu$  es la constante cosmológica de la teoría. Haciendo este límite es fácil ver que

$$\psi(x, \mu) = e^{-Nx^2/2g} \langle \det(x - M) \rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\kappa^{-2/3}(x+\mu)s - is^3/3} \quad (5.55)$$

que es reconocible como la función de Airy

$$\psi(x, \mu) = Ai\left(\frac{x + \mu}{\kappa^{2/3}}\right) \quad (5.56)$$

Esta función satisface

$$Q\psi = x\psi \quad P\psi = \kappa\partial_x\psi \quad (5.57)$$

donde

$$Q = \kappa^2 d^2 + \mu \quad P = \kappa d \quad (5.58)$$

que satisfacen  $[P, Q] = \kappa$ .

La función de Airy es entera en todo el plano complejo  $x$ . Es oscilatoria en el eje real para  $x \leq -\mu$  (donde clásicamente esta la línea de ramificación) y decae exponencialmente para  $x > -\mu$ . Por tanto, no nos encontramos con una superficie de Riemann con dos hojas  $X_{2,1}$  como en el límite clásico, sino simplemente con el plano complejo.

### 5.4.1. Resolvente Cuántico

Vamos a estudiar en detalle la estructura analítica del resolvente para este ejemplo. La distribución cuántica de autovalores queda

$$\rho_\kappa(l) \sim \kappa^{1/3} Ai'\left(\frac{l + \mu}{\kappa^{2/3}}\right)^2 - \kappa^{-1/3} Ai\left(\frac{l + \mu}{\kappa^{2/3}}\right)^2 \quad (5.59)$$

que es positiva en todo el eje real. Si utilizamos las expansiones asintóticas para la función de Airy

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}e^{-2x^{3/2}/3} \quad |arg(x)| < \pi \quad (5.60)$$

$$Ai(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) \quad arg(x) = \pi \quad (5.61)$$

se ve que el límite clásico de la densidad de autovalores en el eje real es

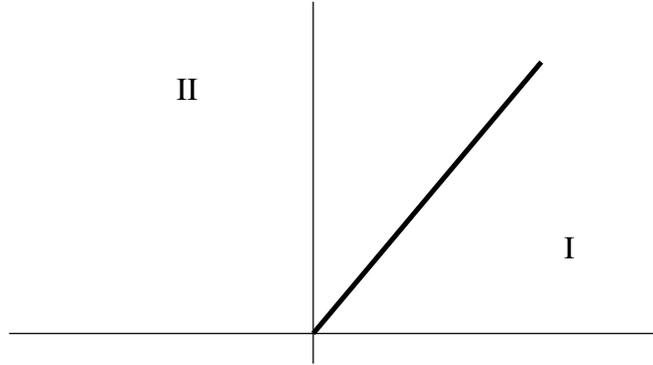
$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \rho_{\kappa}(l) = \frac{\kappa}{8\pi(l+\mu)}e^{-4(l+\mu)^{3/2}/3\kappa} \quad l > -\mu \quad (5.62)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \rho_{\kappa}(l) = \frac{\sqrt{-(l+\mu)}}{\pi} \quad l < -\mu \quad (5.63)$$

Consideremos ahora el resolvente cuántico. Como  $\rho_{\kappa}$  es positiva en todo el eje real dicho resolvente debe presentar una discontinuidad en todo el eje real. Si definimos los dos resolventes  $R_+$  y  $R_-$  entonces (fijamos  $\mu = 0$  para que las fórmulas queden mas sencillas)

$$R_+(x) - R_-(x) \sim \frac{i\kappa}{4x}e^{-4x^{3/2}/3\kappa} \quad (5.64)$$

esta discontinuidad es pequeña en la región en la que  $|arg(x)| \leq \pi/3$  (que llamaremos región I) y grande cuando  $\pi/3 < |arg(x)| \leq \pi$  (región II). Por tanto la discontinuidad no perturbativa que tenemos pequeña en la región I es muy grande en la región II. En la región II el resolvente  $R_-$  nos da el comportamiento clásico correcto en el semiplano inferior y  $R_+$  en el superior. Para encontrar la segunda hoja de la superficie de Riemann tenemos que tomar primero el límite clásico en  $R_+$  en la unión de la región I y el semiplano superior. El corte de ramificación en  $x < 0$  solo aparece si despreciamos las correcciones no perturbativas. Una vez hecho esto, ya podemos continuar analíticamente por la línea de ramificación para encontrar la segunda hoja.

Estructura de regiones en el plano complejo  $x$ 

### 5.4.2. El Fenómeno de Stokes

Consideremos un momento la amplitud completa para la brana FZZT en el límite continuo

$$\psi(x, \mu) = e^{-Nx^2/2g} \langle \det(x - M) \rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\kappa^{-2/3}(x+\mu)s - is^3/3} \quad (5.65)$$

La aproximación semiclásica consiste en quedarse con la contribución a la integral de los extremos del exponente. Esta integral tiene dos extremos en (fijamos  $\mu = 0$ )

$$\langle s \rangle = \pm \kappa^{-1/3} \sqrt{-x} \quad (5.66)$$

por tanto, semiclásicamente para cada  $x$  hay dos posibles valores de  $s$  que dan la contribución dominante. Estos dos posibles valores de  $s$  son los que ponemos en correspondencia con las dos posibles ramas de la superficie de Riemann. El problema está en que cuando consideramos la integral completa nos encontramos con una función entera de  $x$ . Esto se debe a que aquí está jugando un papel el conocido como fenómeno de Stokes. Dicho fenómeno consiste en que la continuación analítica de la expansión asintótica de una función en una región no tiene por qué coincidir con la expansión asintótica en otra región<sup>2</sup>.

La función de Airy es un ejemplo clásico para ilustrar este fenómeno. En la región para

---

<sup>2</sup>Para más detalles, ver el apéndice

$x$  muy grande y positivo

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-2x^{3/2}/3} \quad (5.67)$$

Queremos continuar analíticamente esta expansión para encontrar el comportamiento de la función para  $x$  muy negativo. Encontramos que  $Ai \sim e^{2i(-x)^{3/2}/3}$ . Pero hay un problema, ya que sabemos que el comportamiento asintótico de la función de Airy para  $x$  muy negativo es

$$Ai(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) \quad (5.68)$$

que es una combinación lineal de los dos puntos extremos de la integral.

Lo que está ocurriendo es que en el tránsito entre  $x$  positivo y  $x$  negativo estamos cruzando una línea de Stokes en

$$\arg(x) = \pm \frac{2\pi}{3} \quad (5.69)$$

Donde las líneas de Stokes son los lugares donde las contribuciones de los extremos de una integral aparecen o desaparecen.

Con esto aprendemos que la aproximación semiclásica es válida, pero al buscar la respuesta cuántica debemos sumar a todos los extremos. Ya que puede haber fenómeno de Stokes no todos los extremos contribuirán necesariamente en las diferentes regiones asintóticas.

Por tanto, la geometría cuántica (el plano complejo  $x$ ) es muy diferente a la geometría clásica (la superficie de Riemann). Las correcciones cuánticas modifican drásticamente la geometría en la que las cuerdas se mueven.



# Capítulo 6

## Sistemas Mecánicos

### Unidimensionales

Este capítulo es completamente independiente de los anteriores, y versa sobre la descripción semiclassical para modelos integrables unidimensionales. La forma en la que atacaremos el problema será considerando el sistema en el espacio de fases y definiendo su función de Weyl-Wigner asociada. En el siguiente capítulo se verá porque este formalismo resulta útil para entender la geometría de las cuerdas minimales.

#### 6.1. Sistemas Integrables

Por sistema clásico integrable unidimensional entendemos aquel que tiene una constante de movimiento (que podemos identificar típicamente con la energía del sistema) lo que permite resolver exactamente el sistema. Como ejemplo típico vamos a considerar una partícula de masa  $m = 1/2$  que se mueve en un potencial  $V(q)$ . La constante de movimiento en este caso es la energía del sistema y viene dada por

$$E = p^2 + V(q) \tag{6.1}$$

donde  $p$  es el momento clásico y  $q$  la coordenada. La mecánica cuántica nos dice que la función de onda independiente del tiempo asociada a dicho sistema  $\psi(q)$  (asociada al estado de energía  $E$ ) satisface una ecuación de Schroedinger del tipo

$$-\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dq^2} + V(q)\psi = E\psi \quad (6.2)$$

Que puede escribirse de la forma

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{p^2(q)}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (6.3)$$

donde

$$p^2(q) = E - V(q) \quad (6.4)$$

Por tanto, resolver el problema mecanocuántico se reduce a encontrar las soluciones de dicha ecuación de Schroedinger. Dicha ecuación es en general imposible de resolver de manera exacta, por lo que resulta útil considerar la aproximación semiclásica que consiste en suponer que  $\hbar$  es una constante pequeña y construir la solución como una expansión en términos de ella. La forma mas sencilla de construir dicha expansión es usando la aproximación WKB que consiste en suponer que la función de onda es de la forma

$$\psi(q) = e^{i\phi(q)/\hbar} \quad (6.5)$$

donde  $\phi = \phi_0 + \hbar\phi_1 + \hbar^2\phi_2 + \dots$ . Si sustituimos en la ecuación y expandimos en términos de  $\hbar$  encontramos que deben cumplirse las ecuaciones

$$-\left(\frac{d\phi_0}{dq}\right)^2 + p^2(q) = 0 \quad (6.6)$$

$$i\frac{d^2\phi_0}{dq^2} - \frac{d\phi_0}{dq} \frac{d\phi_1}{dq} = 0 \quad (6.7)$$

junto con un conjunto infinito de ecuaciones que involucran las funciones  $\phi_n$  con  $n > 1$ . Este conjunto de ecuaciones puede resolverse iterativamente con lo que llegamos a las soluciones WKB del sistema

$$\psi(q) = \left(\frac{A_+}{p(q)^{1/2}} e^{+\frac{i}{\hbar} \int p(q)} + \frac{A_-}{p(q)^{1/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(q)}\right)(1 + O(\hbar)) \quad (6.8)$$

donde  $A_{\pm}$  son prácticamente constantes en las regiones donde la aproximación es válida. Vamos a adoptar la notación para las fases de esta solución aproximada  $f = \int p(q)/\hbar$ . Si escribimos la ecuación de Schroedinger en términos de  $\phi$  nos queda

$$-\left(\frac{d\phi}{dq}\right)^2 + i\hbar\frac{d^2\phi}{dq^2} + p^2(q) = 0 \quad (6.9)$$

con lo que vemos que la aproximación no puede ser válida cerca de los puntos en los que  $p^2(q) = 0$  (puntos de retorno clásicos). Esto se refleja en la función de onda en las divergencias que la aproximación WKB de aparecen en dichos puntos.

## 6.2. Parámetros de Stokes

Para estudiar que le ocurre a la función de onda del sistema cerca de estos puntos de retorno vamos a considerar primero que podemos decir acerca de como cambian las constantes de la aproximación WKB  $A_{\pm}$  cuando cruzamos un punto de retorno. Para ello vamos a suponer que la función de onda es de la forma

$$\psi(q) = \frac{A_+}{p(q)^{1/2}} e^{+\frac{i}{\hbar} \int p(q)} + \frac{A_-}{p(q)^{1/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(q)} \quad (6.10)$$

donde ahora  $A_{\pm}$  son funciones de  $q$ . Puede verse que dichas funciones satisfacen

$$\frac{dA_{\pm}}{dq} = \frac{1}{2p(q)} \frac{dp(q)}{dq} A_{\mp} e^{\mp \frac{2i}{\hbar} \int p(q)} \quad (6.11)$$

con lo que vemos una divergencia para la variación de las mismas en los puntos de retorno clásicos.

Para estudiar la variación de estas constantes vamos a extender  $q$  a valores complejos y a invocar dos principios que vamos a imponer sobre el comportamiento de la función de onda

1. Principio de Realidad: Para el caso de  $V(q)$  real siempre es posible fijar las constantes de tal modo que encontremos dos soluciones reales linealmente independientes de la ecuación de Schoedinger sobre el eje real.

2. Principio de Dominación exponencial: Este principio nos fija la forma en la que varían las funciones  $A_{\pm}$  cuando nos movemos a lo largo del plano complejo  $q$ . Si nos situamos en las líneas del plano complejo en las que la fase es imaginaria pura

$$f(q) = +i|f(q)| \quad (6.12)$$

la función de onda adopta la forma

$$\psi(q) = \frac{A_+(q)}{p(q)^{1/2}} e^{-|f(q)|} + \frac{A_-(q)}{p(q)^{1/2}} e^{+|f(q)|} \quad (6.13)$$

con lo que el segundo término es el dominante a menos que  $A_-$  sea excepcionalmente pequeño. Sobre estas líneas los coeficientes varían según las ecuaciones

$$\frac{dA_{\pm}}{dq} = \frac{1}{2p(q)} \frac{dp(q)}{dq} A_{\mp} e^{\pm 2|f(q)|} \quad (6.14)$$

con lo que vemos que  $A_-$  no cambia significativamente en esta región del plano complejo, mientras que  $A_+$  si lo hace. Por tanto el valor de  $A_+$  cambiara cuando crucemos dichas líneas del plano complejo. La región en la que sea  $A_-$  cambia vendrá marcada por las líneas del plano complejo que satisfacen

$$f(q) = -i|f(q)| \quad (6.15)$$

Estas líneas en las que la fase es imaginaria pura son las llamadas líneas de Stokes y son muy importantes ya que delimitan las regiones en las que se produce un cambio significativo en las constantes de la solución. Las líneas en las que la fase es real se llaman líneas de anti-Stokes y corresponden a puntos en los que los coeficientes  $A_{\pm}$  son constantes lejos de los puntos de retorno. Dichas líneas de Anti-Stokes corresponden a las líneas de ramificación que aparecen en principio en la función de onda. Como veremos, el análisis preciso del comportamiento a ambos lados de los puntos de retorno y las reglas de conexión a ambos lados del punto de retorno eliminan dichas ramas dando lugar a una función de onda perfectamente univaluada. Con toda

esta información podemos enunciar el principio de dominación exponencial del modo siguiente: Los coeficientes  $A_{\pm}$  solo cambian al cruzar una línea de Stokes en la que la exponencial a la que acompañan es subdominante; el cambio será proporcional al coeficiente que acompaña a la exponencial dominante

Como ejemplo veamos el caso en el que cruzamos una línea de Stokes en las que  $A_{-}$  acompaña a la exponencial dominante (sobre dicha línea  $f = +i|f|$ ). Los coeficientes de la solución WKB a ambos lados de la línea de Stokes viene dados por

$$A_{+}^o = A_{+}^i + \alpha A_{-}^i \quad (6.16)$$

$$A_{-}^o = A_{-}^i \quad (6.17)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de Stokes asociado a la transición.

Para ver como funciona esto en casos concreto vamos a considerar un punto de retorno clásico en  $q = 0$  tal que

$$p^2 = -aq \quad (6.18)$$

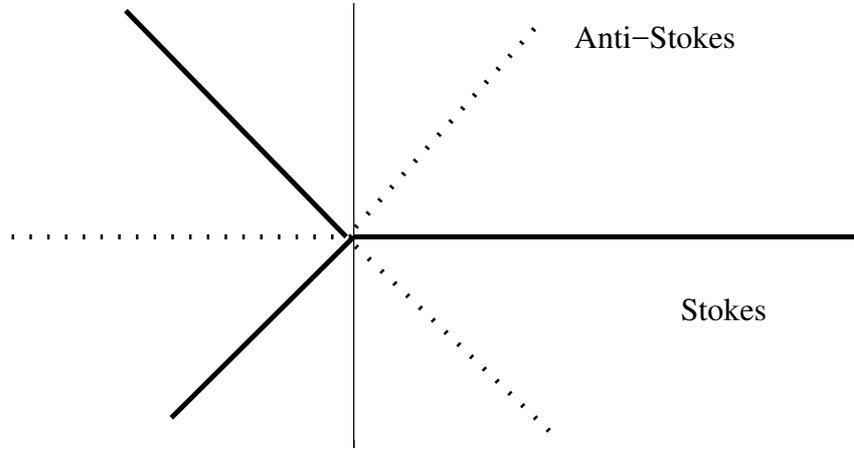
en la vecindad de dicho punto. Cerca de  $q = 0$  la fase viene dada por

$$f(q) = \frac{2}{3\hbar} q^{3/2} \quad (6.19)$$

con lo que encontramos las líneas de Stokes situadas en  $\arg(q) = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$ , y las de anti-Stokes en  $\arg(q) = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$ . En la línea con  $\arg(q) = 0$  la exponencial dominante es la asociada a  $A_{+}$  y para la línea con  $\arg(q) = 2\pi/3$  la exponencial dominante es la asociada a  $A_{-}$ .

Si queremos encontrar la relación entre los coeficientes en el eje real negativo y los del eje real positivo vemos que estamos cruzando dos líneas de Stokes con lo que debemos introducir 2 parámetros de Stokes independientes  $\alpha$  y  $\beta$ . Si denotamos por  $A_{\pm}^1$  los coeficientes en el eje real negativo y por  $A_{\pm}^2$  los coeficientes en el eje real positivo y aplicamos el principio de dominación exponencial nos encontramos que

$$A_{+}^2 = A_{+}^1 + \alpha A_{-}^1 \quad (6.20)$$



Estructura de líneas de Stokes para un punto de retorno de primer orden.

$$A_-^2 = \beta A_+^1 + (1 + \alpha\beta)A_-^1 \quad (6.21)$$

Si ahora aplicamos el principio de realidad y fijamos  $A_{\pm}^1 = e^{\pm i(\pi/4 - \mu)}$  (donde hemos fijado este valor concreto para simplificar las expresiones), nos encontramos con que en el eje real negativo

$$\psi \sim \frac{2 \cos(f(q) - \mu + \frac{\pi}{4})}{|p(q)|^{1/2}} \quad (6.22)$$

mientras que en eje real positivo

$$\psi \sim \frac{1}{|p(q)|^{1/2}} ((ie^{-i\mu} + \alpha e^{i\mu})e^{+|f|} + (i\beta e^{-i\mu} + (1 + \alpha\beta e^{i\mu}))e^{-|f|}) \quad (6.23)$$

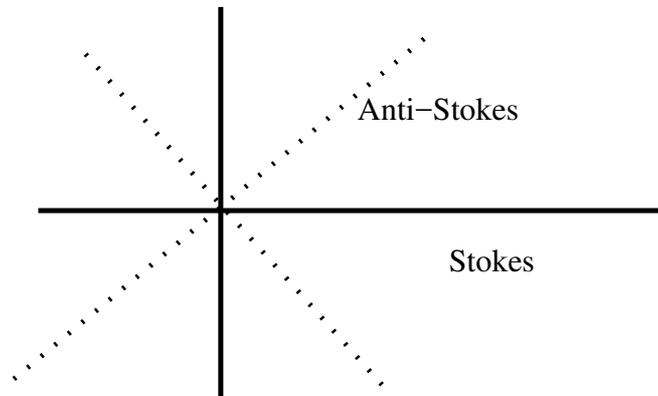
Aplicando ahora el principio de realidad para esta solución en el eje real positivo podemos encontrar que los parámetros de Stokes quedan fijados salvo una fase

$$\alpha = -i \quad (6.24)$$

$$\beta = -\frac{e^{i\theta}}{2 \sin \theta} \quad (6.25)$$

La fase  $\theta$  no queda fijada por este método y es necesario recurrir a aproximaciones mas sofisticadas [94]. Con todo esto es fácil ver que fijando  $\mu = 0$  la función de onda resultante queda independiente de dicha fase con lo que encontramos la regla de conexión

$$\frac{\cos(|f| - \frac{\pi}{4})}{|p|^{1/2}} \leftrightarrow \frac{e^{-|f|}}{2|p|^{1/2}} \quad (6.26)$$



Estructura de líneas de Stokes para un punto de retorno de segundo orden.

sobre el eje real a ambos lados del punto de retorno. Notar que la función de onda resultante no presenta líneas de ramificación en ninguna parte del eje real como debe ser para las soluciones de una ecuación de Schroedinger con potencial univaluado.

Para el caso en el que  $p^2 = -aq^2$  cuando estamos cerca del punto de retorno en  $q = 0$  la situación es similar.

Nos encontramos líneas de Stokes en  $\arg(q) = 0, \pm\pi/2, \pi$  por lo que para encontrar las reglas de conexión para el eje real positivo y negativo tenemos que introducir tres parámetros de Stokes independientes. La imposición de los principios de realidad nos dejan sin fijar tres parámetros reales con lo que este método no resulta excesivamente útil para estudiar la función de onda en este caso. Veremos en la siguiente sección como el método de la aproximación uniforme nos dará mas información.

### 6.3. Aproximación Uniforme

Nuestro problema básico consiste en encontrar soluciones de una ecuación tipo Schroedinger

$$\frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + H(q)\psi(q) = 0 \quad (6.27)$$

Para resolver dicho problema podemos intentar resolver una ecuación mas sencilla del mismo tipo

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} + G(s)\phi(s) = 0 \quad (6.28)$$

donde  $G(s)$  sea similar a  $H(q)$  pero mas sencilla por lo que la ecuación sea mas sencilla de resolver. Si expresamos  $\psi$  en función de  $\phi$  como

$$\psi(q) = t(q)\phi(s(q)) \quad (6.29)$$

es trivial ver que fijando  $t(q) = (ds/dq)^{-1/2}$  nos fija  $s(q)$  como solución de la ecuación

$$H(q) = \left(\frac{ds}{dq}\right)^2 G - \left(\frac{ds}{dq}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{ds}{dq}\right)^{-1/2} \quad (6.30)$$

y la condición que fija el que  $H$  y  $G$  sean lo suficientemente similares viene dada por la condición

$$\left| \frac{1}{H(q)} \left(\frac{ds}{dq}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{ds}{dq}\right)^{-1/2} \right| \ll 1 \quad (6.31)$$

con lo que tenemos que

$$\frac{ds}{dq} = \left(\frac{H}{G}\right)^{1/2} \quad (6.32)$$

y podemos escribir nuestra solución aproximada

$$\psi(q) = \left(\frac{G(s(q))}{H(q)}\right)^{1/4} \phi(s(q)) \quad (6.33)$$

Veamos que ocurre si consideramos un punto de retorno clásico en  $q = 0$  tal que  $p^2 > 0$  para valores negativos de  $q$  y  $p^2 < 0$  para valores positivos. Ya que tenemos que resolver la ecuación

$$\hbar^2 \frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + p^2(q)\psi(q) = 0 \quad (6.34)$$

vamos a considerar la función  $G(s)$  tal que sea constante e igual a  $+1$  para valores negativos de  $s$  y  $-1$  para valores positivos. La ecuación simplificada que tenemos que resolver es

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} + \phi(s) = 0 \quad s < 0 \quad (6.35)$$

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} - \phi(s) = 0 \quad s > 0 \quad (6.36)$$

que tiene por soluciones  $\phi = e^{\pm is}$  para  $s < 0$  y  $\phi = e^{\pm s}$  para  $s > 0$ . Si utilizamos entonces la relación entre  $s$  y  $q$

$$\frac{ds}{dq} = \frac{p(q)}{\hbar} \quad (6.37)$$

nos encontramos con que las soluciones  $\psi(q)$  son las soluciones usuales WKB. Por tanto vemos que una simplificación tan drástica de la función  $p^2(q)$  nos hace perder toda la información del comportamiento preciso de la función en el punto de retorno.

Para estudiar el comportamiento en el punto de retorno vamos a considerar primero que  $p^2 = -aq$  cerca de dicho punto y consideremos la función de prueba  $G(s) = -s$ . En este caso la ecuación simplificada que debemos resolver viene dada por

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} - s\phi(s) = 0 \quad (6.38)$$

que tiene como soluciones las funciones de Airy  $Ai(s)$  y  $Bi(s)$ . La relación entre  $s$  y  $q$  en este caso viene dada por

$$\frac{2}{3}s^{3/2} = \int p(q)/\hbar = f(q) \quad (6.39)$$

y por tanto la solución cuando tenemos un punto de retorno de este tipo viene dada por

$$\psi(q) = \left(\frac{s(q)}{p^2(q)}\right)^{1/4} (aAi(s(q)) + bBi(s(q))) \quad (6.40)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. De hecho pueden encontrarse formas precisas de conexión [94] que nos fijan el comportamiento de la función de onda sobre dicho punto de retorno

$$\frac{\cos(|f| - \frac{\pi}{4})}{|p|^{1/2}} \leftarrow Ai(s(q)) \rightarrow \frac{e^{-|f|}}{2|p|^{1/2}} \quad (6.41)$$

Para el caso en el que en la cercanía del punto de retorno en  $q = 0$  el comportamiento de  $p^2 = -ax^2$  la función de prueba que tenemos que considerar es  $G(s) = -s^2$  con lo que la ecuación a resolver es

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} - s^2\phi(s) = 0 \quad (6.42)$$

que tiene por solución las funciones parabólico-elípticas  $D_{-1/2}(\pm \frac{s}{\sqrt{2}})$ . Como en el caso anterior, también se pueden encontrar reglas de conexión precisas utilizando las expansiones

asintóticas de dichas funciones [94] con lo que encontramos

$$\frac{e^{-|f|}}{|p|^{1/2}} \leftarrow 2^{1/4} \left(\frac{ds}{dq}\right)^{-1/2} D_{-1/2}\left(-\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow 2^{1/2} \frac{e^{|f|}}{|p|^{1/2}} \quad (6.43)$$

y también

$$\frac{e^{|f|}}{|p|^{1/2}} \leftarrow 2^{-1/4} \left(\frac{ds}{dq}\right)^{-1/2} D_{-1/2}\left(+\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow 2^{-1/2} \frac{e^{-|f|}}{|p|^{1/2}} \quad (6.44)$$

con lo que tenemos el comportamiento para las funciones de onda sobre el punto de retorno.

Como vemos, esta aproximación uniforme elimina las singularidades que aparecían en la aproximación WKB en los puntos de retorno clásicos. Como veremos en el último capítulo de esta memoria es posible relacionar esta aproximación uniforme con correcciones no perturbativas en el contexto de la cuerda minimal que eliminan las líneas de ramificación que aparecen en la amplitud de la brana FZZT.

## 6.4. Formalismo de Weyl-Wigner

Consideremos un sistema general con un grado de libertad descrito por un par de operadores conjugados  $(\hat{p}, \hat{q})$ . Sea un operador  $\hat{a}$  expresable en términos de  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$ . La correspondencia de Weyl relaciona este operador  $\hat{a}$  con una función  $A(p, q)$

$$A(p, q) = \frac{1}{\hbar} \text{tr} \left[ \hat{a} \int dQ \int dP e^{\frac{i}{\hbar} ((\hat{p}-p)Q + (\hat{q}-q)P)} \right] \quad (6.45)$$

y la inversa de esta transformación es

$$\hat{a} = \frac{1}{\hbar^2} \int dq \int dp A(p, q) \int dQ \int dP e^{\frac{-i}{\hbar} ((\hat{p}-p)Q + (\hat{q}-q)P)} \quad (6.46)$$

donde todas las integraciones van de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

$A(p, q)$  es una función cuántica que depende de  $\hbar$  y que difiere de la función clásica correspondiente al operador  $\hat{a}$  excepto cuando  $\hbar = 0$ .

La función de Wigner  $f(p, q)$  corresponde a fijar el operador  $\hat{a} = \frac{1}{\hbar} |\psi\rangle\langle\psi|$ , donde  $|\psi\rangle$  es el estado cuántico que  $f$  representa. Podemos escribir

$$f(p, q) = \frac{1}{\hbar^2} \int dQ \int dP e^{\frac{-i}{\hbar} (pQ + qP)} \langle \psi | e^{\frac{i}{\hbar} (\hat{q}P + \hat{p}Q)} | \psi \rangle \quad (6.47)$$

usando que  $[\hat{q}, [\hat{q}, \hat{p}]] = [\hat{p}, [\hat{q}, \hat{p}]] = 0$  podemos hacer directamente una de las dos integraciones. Al final tenemos

$$f(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dx e^{\frac{-2i}{\hbar}px} \langle q + x | \pi \rangle \langle \psi | q - x \rangle \quad (6.48)$$

con lo que se ve que la función de Wigner es real.

De las formulas anteriores se sigue que

$$\int dq f = |\langle p | \psi \rangle|^2 \quad (6.49)$$

$$\int dp f = |\langle q | \psi \rangle|^2 \quad (6.50)$$

Cuando  $|\psi\rangle$  está normalizado a la unidad tenemos también

$$\int dq \int dp f = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (6.51)$$

El valor esperado en el estado  $|\psi\rangle$  del operador  $\hat{a}$  viene dado por

$$\langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle = \int dp \int dq A(p, q) f(p, q) \quad (6.52)$$

Algunas propiedades del comportamiento semiclásico de la función de Wigner  $f$  pueden obtenerse usando la identidad

$$(|\psi\rangle \langle \psi|)^2 = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (6.53)$$

que aplicando la correspondencia de Weyl nos da

$$f(p, q) = \frac{4}{\hbar} \int dq_1 \int dq_2 \int dp_1 \int dp_2 f(p_1, q_1) f(p_2, q_2) \cos \theta \quad (6.54)$$

donde

$$\theta = \frac{2}{\hbar} (p_1(q - q_2) + p_2(q_1 - q) + p(q_2 - q_1)) \quad (6.55)$$

En [95] encontramos que condiciones debe cumplir  $f$  para representar un estado puro. La condición para que  $|\psi\rangle$  sea un estado puro implica la cota

$$|f(p, q)| \leq 2/\hbar \quad (6.56)$$

lo que implica que  $f$  es una función acotada, salvo quizá en el límite clásico  $\hbar = 0$ . Si integramos sobre  $p$  y  $q$  tenemos

$$\int dq \int dp f^2 = \frac{1}{\hbar} \quad (6.57)$$

que es divergente en el límite clásico, lo que no ocurre en la integral de  $f$ . Puede verse también que

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f = \hbar f^2 \quad (6.58)$$

con lo que en el límite clásico la función de Wigner es o cero o infinito.

## 6.5. Límite Clásico de Sistemas Integrables

Un sistema integrable es aquel en el que tenemos tantas cantidades conservadas independientes como grados de libertad. Para estos sistemas la trayectoria en el espacio de fase esta confinada clásicamente a un toro de dimensión igual al número de grados de libertad. En el caso de un solo grado de libertad clásicamente el sistema se mueve en una curva cerrada en el plano de fase determinada por la energía del sistema (que es la única cantidad conservada que necesitamos). Dicha curva cerrada determina  $p$  como una función multivaluada de  $q$ . Para el caso unidimensional de una partícula en un potencial

$$p(q, E) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))} \quad (6.59)$$

Para estudiar estos sistemas resulta útil utilizar el formalismo de variables ángulo-acción. La coordenada acción se define por

$$I(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} p dq \quad (6.60)$$

donde  $\gamma$  es la curva cerrada en el plano de fases donde el sistema esta clásicamente. Los puntos sobre dicha curva están parametrizados por las variables ángulo

$$\alpha = \partial_I S(q, I) \quad (6.61)$$

donde  $S$  es la acción dependiente de las coordenadas

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q p dq \quad (6.62)$$

y  $q_0$  es un punto cualquiera de la curva clásica.

Las variables  $\alpha$  e  $I$  son variables conjugadas en el espacio de fases y están relacionadas con  $p$  y  $q$  mediante una transformación canónica que tiene por función generatriz a  $S(q, I)$ .

Los autoestados del hamiltoniano  $|\psi_i\rangle$  corresponden a una determinada curva en el espacio de fases  $\gamma_i$  y tiene asociados un valor de la variable acción  $I_i$ . Para estudiar el límite clásico de la función de Wigner  $f$  vamos a fijar uno de estos valores  $I_i$  y a estudiar la función de Wigner asociada al estado  $|\psi_i\rangle$  que denotaremos por  $f_i$ .

Las autofunciones  $\langle q|\psi_i\rangle$  serán combinaciones lineales de las funciones WKB

$$\langle q|\psi_i\rangle_k C |det|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_k(q, I_i)} \quad (6.63)$$

que son las soluciones semiclásicas del problema de Schroedinger asociado.  $C$  es una constante de normalización y el índice  $k$  denota los valores de  $S$  correspondientes a las diferentes ramas de la función multivaluada  $p(q)$ . Para nuestro caso  $k = +, -$ . Para el caso unidimensional

$$det = \frac{\partial^2 S_k(q, I_i)}{\partial q \partial I} \quad (6.64)$$

Si queremos evaluar la función de Wigner en un punto  $(p, q)$  cerca de la curva clásica, deberemos fijar la rama de la función  $p(q)$  tal que  $(p, q)$  este efectivamente cerca de la curva. Para ese punto, solo la rama que cumpla esa condición contribuirá en el límite clásico a la función de Wigner. Por tanto, podemos escribir

$$f_i(p, q) = \frac{C^2}{\pi \hbar} \int dx e^{\frac{i}{\hbar} (S(q+x, I_i) - S(q-x, I_i) - 2px)} |detdet|^{1/2} \quad (6.65)$$

donde

$$detdet = \frac{\partial^2 S(q+x, I_i)}{\partial q \partial I} \frac{\partial^2 S(q-x, I_i)}{\partial q \partial I} \quad (6.66)$$

Para encontrar el límite clásico tenemos que fijar  $x = 0$  en (6.66) y expandir el exponente en (6.65) a primer orden en  $x$  usando la relación

$$\partial_q S(q, I) = p(q, I) \quad (6.67)$$

con lo que llegamos a

$$f_i(p, q) = \frac{C^2}{\pi\hbar} \left| \frac{\partial p}{\partial I} \right| \int dx e^{\frac{2i}{\hbar}(p(q, I_i) - p)x} = C^2 \left| \frac{\partial p}{\partial I} \right| \delta(p - p(q, I_i)) \quad (6.68)$$

si fijamos  $C^2 = 1/2\pi$  y cambiamos variables de  $p$  a  $I$  tenemos

$$f_i(p, q) = \frac{1}{2\pi} \delta(I(p, q) - I_i) \quad (6.69)$$

con lo que nos encontramos que clásicamente la función de Wigner es una delta localizada en la solución clásica y es uniforme sobre la curva clásica ya que es independiente de la variable ángulo.

## 6.6. Dinámica Semiclásica

Para estudiar el aspecto de esta función de Wigner cuando tenemos en cuenta correcciones cuánticas vamos a fijar una curva clásica  $\gamma$  que nos define una variable acción  $I$ , y un estado cuántico de energía definida  $|\psi\rangle$ . Para dicho estado

$$f(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dx \frac{e^{\frac{i\Phi}{\hbar}}}{|JJ|^{1/2}} \quad (6.70)$$

donde

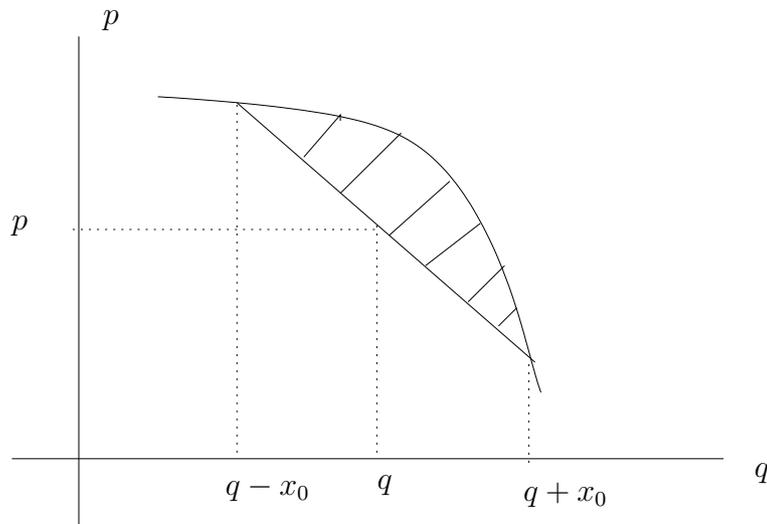
$$\Phi = \int_{q-x}^{q+x} dq p(q) - 2px \quad (6.71)$$

y

$$JJ = \frac{\partial I}{\partial p}(q+x, p(q+x)) \frac{\partial I}{\partial p}(q-x, p(q-x)) \quad (6.72)$$

En el límite semiclassical la contribución dominante a la integral vendrá de los puntos donde el exponente es estacionario

$$2p = p(q+x) + p(q-x) \quad (6.73)$$



Definición de  $A(p, q)$ . El punto 1 corresponde a aquel con coordenadas  $(q - x_0, p(q - x_0))$  y el punto 2 a aquel con coordenadas  $(q + x_0, p(q + x_0))$

Sea  $x_0(p, q)$  una de las soluciones de la ecuación anterior. Esta claro que si esto es así, también sera solución  $-x_0(p, q)$ . El conjunto de puntos  $(q \pm x_0, p(q \pm x_0))$  pertenecen a la curva  $\gamma$  (ver figura). Vamos a llamar a estos puntos 1 y 2 según los vamos encontrando al movernos por la curva clásica. Para estos puntos la función  $\Phi$  toma los valores

$$\Phi = \int_{q \mp x_0}^{q \pm x_0} dq p(q) \mp 2px_0 = -A(p, q) \quad \text{en } 1 \quad (6.74)$$

$$\Phi = \int_{q \mp x_0}^{q \pm x_0} dq p(q) \mp 2px_0 = +A(p, q) \quad \text{en } 2 \quad (6.75)$$

donde  $A(p, q)$  es el área entre la curva clásica y la recta que une a los puntos 1 y 2. Las segundas derivadas nos dan

$$\frac{\partial p}{\partial q}(q + x_0) - \frac{\partial p}{\partial q}(q - x_0) \quad (6.76)$$

que es positiva en 1 y negativa en 2.

Para evaluar la integral vamos a usar el método de fases estacionarias, que es valido si los puntos 1 y 2 no están muy cerca el uno del otro.  $JJ$  puede escribirse de una forma mas

simétrica si tenemos en cuenta que sobre la curva se cumple que

$$\frac{dI}{dq} = \frac{\partial I}{\partial q} + \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 0 \quad (6.77)$$

Desarrollando el exponente a segundo orden en  $x$  nos encontramos

$$f(p, q) = \frac{2 \cos(A(p, q)/\hbar - \pi/4)}{\pi \sqrt{\hbar} (I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1))^{1/2}} \quad (6.78)$$

Esta función presenta algunos problemas. Para empezar es divergente sobre la curva clásica, con lo que no se comporta como una función de Wigner razonable que debe ser acotada en todo el plano de fase. Esta divergencia se debe a que cuando estamos muy cerca de la curva (los puntos 1 y 2 están muy juntos), el método de fases estacionarias no es aplicable. Esta expresión para la función de Wigner tampoco satisface las condiciones de normalización y nos predice un valor cero para puntos en el exterior de la curva clásica donde la integral no tiene puntos de fase estacionaria.

Una forma de remediar todos estos problemas es utilizando la aproximación uniforme que consiste en desarrollar el exponente hasta tercer orden en los puntos estacionarios. Haciendo esto nos encontramos con

$$f(p, q) = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{3A}{2}\right)^{1/6} Ai\left(-\left(\frac{3A}{2\hbar}\right)^{2/3}\right)}{\pi \hbar^{2/3} (I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1))^{1/2}} \quad (6.79)$$

Esta aproximación a la función de Wigner tiene algunas propiedades interesantes.

- Cuando los puntos 1 y 2 no están muy juntos la aproximación uniforme se reduce a la aproximación de fases estacionarias.
- En el exterior de la curva clásica la función de Wigner no se anula, sino que presenta un decaimiento de tipo exponencial.
- Esta aproximación presenta un valor finito sobre la curva clásica. De hecho, las cotas se cumplen. En un sentido matemático, la curva clásica es una catástrofe de la función de Wigner. Es posible que la función de Wigner presente mas catástrofes en otros puntos como veremos mas adelante.

- Cuando integramos sobre  $p$  esta aproximación de la función de Wigner nos da la expresión correcta para la aproximación semiclásica de la función de onda incluso cerca de los puntos de retorno de la trayectoria clásica.

Para ver esto, vamos a considerar un hamiltoniano par en  $p$  y un punto de retorno situado en  $q = q_t$ . Tenemos

$$|\langle q|\psi\rangle|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\hbar^{2/3}} \int_0^\infty dp \frac{(3A/2)^{1/6} Ai(-(3A/2\hbar)^{2/3})}{(I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1))^{1/2}} \quad (6.80)$$

Para calcular la integral vamos a cambiar de variables de  $p$  a  $V$  donde

$$V = -(3A/2)^{2/3} \quad (6.81)$$

con lo que cuando  $p$  va de 0 a  $\infty$   $V$  va de

$$V_0 = -(3A(0, q)/2)^{2/3} = -(3 \int_q^{q_t} pdq)^{2/3} \quad (6.82)$$

hasta  $\infty$ . La región que mas contribuye a la integral es la que esta cerca del límite inferior  $V_0$ . Esto se debe a que cerca de  $p = 0$

$$dp = \frac{1}{2}(3A(0, q)/2)^{1/6} \left| \frac{\partial p}{\partial q} \right|^{1/2} \frac{dV}{\sqrt{V - V_0}} \quad (6.83)$$

que explota en  $V = V_0$ . Notar también que cuando  $p$  esta cerca de cero entonces

$$I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1) \sim 2I_q(1)I_p(1) \quad (6.84)$$

Utilizando el hamiltoniano del sistema podemos escribir las derivadas de la variable acción de una forma mas explícita. Si usamos las ecuaciones de Hamilton (que valen sobre la curva clásica)

$$\omega I_p(1) = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}(1) \quad (6.85)$$

$$\omega I_q(1) = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}(1) = \dot{q}(1) \left| \frac{\partial p}{\partial q} \right| \quad (6.86)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular del movimiento a lo largo de la curva clásica, podemos escribir

$$I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1) \sim 2I_q(1)I_p(1) \sim 2\left|\frac{\partial p}{\partial q}\right|\frac{\dot{q}^2}{\omega^2} \quad (6.87)$$

cuando  $p$  esta cerca de cero.

Con todo esto podemos aproximar la densidad de probabilidad por

$$|\langle q|\psi\rangle|^2 = \frac{\omega(3A(0,q)/2)^{1/3}}{\pi\hbar^{2/3}|\dot{q}(q)|} \int_{V_0}^{\infty} dV \frac{Ai(V/\hbar^{2/3})}{\sqrt{V-V_0}} \quad (6.88)$$

esta integral puede calcularse exactamente utilizando la identidad para funciones de Airy

$$\int_{-y}^{\infty} dx \frac{Ai(x)}{\sqrt{x+y}} = 2^{2/3}\pi Ai^2(y/2^{2/3}) \quad (6.89)$$

lo que nos da

$$|\langle q|\psi\rangle|^2 = \frac{2\omega}{|\dot{q}(q)|} \left(\frac{3}{2\hbar} \int_q^{qt} dq p(q)\right)^{1/3} Ai^2\left(-\left(\frac{3}{2\hbar} \int_q^{qt} dq p(q)\right)^{2/3}\right) \quad (6.90)$$

## 6.7. Catástrofes

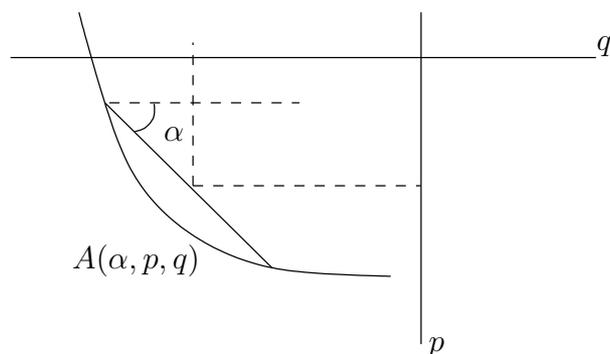
Las catástrofes en la función de Wigner se dan en los puntos donde la aproximación de fases estacionarias es divergente. Ya hemos estudiado como analizar esta divergencia en el caso de que la catástrofe se de en la curva clásica mediante el truco de la aproximación uniforme. Para estudiar catástrofes mas generales vamos a estudiar detalladamente la cantidad

$$D(p, q) = I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1) = (\dot{p}(1)\dot{q}(2) - \dot{q}(1)\dot{p}(2))/\omega^2 \quad (6.91)$$

Sea  $s$  la longitud de arco sobre la curva  $\gamma$  y  $\psi$  el ángulo formado por la tangente a  $\gamma$  y el eje  $q$ .

En términos de estas nuevas variables podemos escribir

$$D(p, q) = \frac{\dot{s}_1\dot{s}_2}{\omega^2} \sin(\psi_1 - \psi_2) \quad (6.92)$$

Plano de fases y definición de  $A(\alpha, p, q)$ .

Con esta fórmula es transparente que las catástrofes ocurrirán en los puntos  $(p, q)$  tales que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  difieran por un múltiplo entero de  $\pi$ . Esto es lo mismo que decir que las catástrofes se dan en los puntos medios de líneas rectas que unen partes paralelas de la curva clásica  $\gamma$ .

En el caso que antes discutimos  $(p, q)$  pertenecía a  $\gamma$  por lo que la línea que une los puntos 2 y 1 es de longitud cero (los puntos 1 y 2 coinciden). En general las catástrofes ocurrirán en líneas  $\ell$  del plano de fases definidas como el conjunto de puntos medios de los diámetros de  $\gamma$  (por diámetros entendemos líneas que unen puntos paralelos de  $\gamma$ ). Las curvas  $\ell$  serán suaves excepto en los puntos en los que no solo las tangentes, sino también las curvaturas sean iguales. A tales puntos los llamaremos cusps. [96]. Para cualquier curva cerrada deben existir al menos tres de estos cusps y en general el número de ellos será impar (ver el apéndice F de [95] para una demostración de este hecho).

Para los puntos que están en  $\ell$  y pertenecen a  $\gamma$  la contribución de la integral viene de un solo punto  $x_0 = 0$  mientras que si estamos en  $\ell$  pero fuera de  $\gamma$  son dos puntos los que contribuyen, digamos  $\pm x_1$ . Para estudiar estos casos más generales de catástrofes cuando  $\gamma$  es una curva cerrada vamos a considerar una representación geométrica: Sea  $A(\alpha, p, q)$  el área definida en la figura donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la línea con el eje  $q$ .

Algo de geometría elemental nos dice que la condición

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0 \quad (6.93)$$

que define una superficie  $S$  en el espacio  $(p, q, \alpha)$  es equivalente a la condición de punto estacionario. En el lenguaje de teoría de catástrofes [96] la condición anterior es el mapa gradiente con variable de estado  $\alpha$  y variables de control  $(p, q)$  y  $S$  es la variedad crítica.  $\ell$  esta formada por las singularidades de la proyección de la variedad crítica  $S$  en la variedad de control (el plano de fase).

Veamos que estructura tiene la variedad  $S$ . Claramente tiene periodo  $\pi$  en la variable  $\alpha$  ya que  $A$  no cambia cuando  $\alpha$  cambia en  $\pi$ .  $S$  toca el cilindro cuya proyección es la curva clásica  $\gamma$  en dos hélices a derechas

$$\alpha = \psi + 2\pi n \quad \alpha = \psi + \pi(2n + 1) \quad (6.94)$$

Lejos de este cilindro  $S$  consiste en dos helicoides que se juntan suavemente en una curva  $M$  que tiene  $\ell$  como proyección en el plano de fase.

Consideremos ahora el caso en el que  $\gamma$  tenga puntos de inflexión. En ese caso la línea de catástrofes  $\ell$  puede estar muy cerca de la curva clásica  $\gamma$ . Consideremos el ejemplo concreto en el que  $\gamma$  tiene dos puntos de inflexión y viene dada por la ecuación

$$p(q) = p_0 - aq^2 + bq^4 \quad (6.95)$$

con  $a$  y  $b$  constantes positivas.

Los puntos de inflexión están en

$$q = \pm \sqrt{a/6b} = \pm q_i \quad (6.96)$$

$$p = p_0 - 5a^2/36b = p_i \quad (6.97)$$

La condición de fase estacionaria puede resolverse exactamente en este caso y encontramos cuatro puntos estacionarios dados por

$$x^2 = \frac{1}{2b}(a - 6bq^2 \pm \sqrt{(a - 6bq^2)^2 - 4b(p(q) - p)}) \quad (6.98)$$

según  $(p, q)$  se acerca a  $\gamma$ , dos de estos valores se acercan a  $x = 0$ . Cuando  $(p, q)$  se acerca a  $\ell$  que tiene por ecuación

$$p = p(q) - (a - 6bq^2)/4b \quad (6.99)$$

los valores de  $x$  tienden a  $x = \pm x_1$  donde

$$x_1 = \sqrt{(a - 6bq^2)/2b} \quad (6.100)$$

En los puntos de inflexión las cuatro raíces tienden a  $x = 0$ .

En partes suaves de  $\ell$ , donde solo dos de las raíces coinciden, resulta obvio que la aproximación uniforme es válida y obtenemos una aproximación en términos de funciones de Airy. Pero existe la diferencia de que en este caso las áreas  $A_1$  y  $A_2$  definidas por los dos puntos que se juntan en  $x_1$  no coinciden lo que introduce un factor

$$F(p, q) = \cos \frac{A_1 + A_2}{2\hbar} \quad (6.101)$$

en la función de Wigner.

En los cusps de  $\ell$  coinciden tres puntos estacionarios y la aproximación uniforme es divergente. Es necesario ir a más ordenes en el desarrollo del exponente.

Con esto hemos descrito todos los posibles tipos de catástrofe que pueden ocurrir en sistemas unidimensionales genéricos<sup>1</sup>. En sistemas que presenten centros de simetría puede darse el caso de catástrofes de orden infinita en puntos aislados del plano de fase.

Cuando tenemos un centro de simetría la curva  $\ell$  se reduce a un punto y la hélice  $M$  degenera a una línea paralela al eje  $\alpha$ . Esto ocurre en el caso de una partícula que se mueve en un potencial par. Un ejemplo especial sería el caso del oscilador armónico en el que  $\gamma$  corresponde a una elipse. Para un oscilador de frecuencia unidad y niveles de energía dados por  $E_n = \hbar(n + 1/2)$  la función de Wigner viene dada por

$$f_n(p, q) = \frac{(-)^n}{\pi\hbar} e^{-(p^2+q^2)/\hbar} L_n\left(\frac{2(p^2+q^2)}{\hbar}\right) \quad (6.102)$$

---

<sup>1</sup>Aquí con genérico queremos decir que no presenta puntos de retorno de orden más alto que la unidad

donde  $L_n$  son los polinomios de Laguerre normalizados a la unidad en el origen. En la catástrofe situada en el origen del plano de fase tenemos un máximo de la función de Wigner dado por

$$f_n(0,0) = 2(-)^n/\hbar \quad (6.103)$$

que satura las cotas.

# Capítulo 7

## Cuerdas Minimales y Sistemas Mecánicos

En este capítulo vamos a aplicar las técnicas de cuantización semiclásica estudiadas en el capítulo anterior al estudio de la geometría de las cuerdas minimales. Veremos que existe un mapa preciso entre los objetos que determinan dicha geometría y ciertos sistemas mecánicos unidimensionales, que se deriva directamente de la representación matricial de las cuerdas minimales. Este mapa relaciona el espacio de fases del sistema mecánico con la geometría clásica de la cuerda, por lo que efectos cuánticos en el espacio de fases pueden interpretarse como efectos de gravedad cuántica en la cuerda minimal. Como veremos dichas correcciones cuánticas se corresponden exactamente en el caso de la gravedad topológica. Usando dicho mapa veremos que el significado del límite continuo en el modelo de matrices se corresponde con la resolución cuántica de las singularidades que aparecen en los puntos de retorno clásicos del sistema mecánico. En presencia de branas de tipo ZZ veremos que las correcciones semiclásicas no son suficientes para resolver las singularidades de la geometría y que necesitamos la aproximación uniforme completa para encontrar una geometría libre de singularidades.

## 7.1. Recordatorio de Geometría Clásica

Para estudiar las cuerdas minimales ya vimos que lo primero que uno puede hacer es considerar las teorías conformes minimales acopladas al campo de Liouville.

$$S = S_m + S_L \quad (7.1)$$

donde

$$S_L = \int \partial\phi^2 + QR\phi + \mu e^{2b\phi} \quad (7.2)$$

La expansión perturbativa de esta teoría solo comprende superficies cerradas y la constante de acoplo de la cuerda viene dada por

$$\kappa \sim e^{Q\phi} \quad (7.3)$$

La teoría conforme minimal no nos da direcciones extra para la geometría con lo que unicamente tenemos una línea parametrizada por  $\phi$ . La expresión para la constante de acoplo nos dice que existe una región de acoplo fuerte en la que la expansión perturbativa pierde su sentido. Por este motivo el utilizar solo cuerdas cerradas no resulta útil para comprender la geometría en dicha zona.

Para estudiar dicha región uno tiene que definir objetos tipo brana en la teoría. La posibilidad que definía las branas de tipo FZZT consistía en introducir cuerdas abiertas con condiciones de tipo Neumann en la dirección de Liouville [11, 12]. La invariancia conforme nos permitía introducir un término de frontera en la acción

$$S_\partial = \mu_B \int_\partial e^{b\phi} \quad (7.4)$$

donde  $\mu_B$  era la constante cosmológica de frontera y es un parámetro de moduli de la FZZT brana. La clave está en utilizar esta brana FZZT como brana de prueba para explorar la región de acoplo fuerte. Para ver que esto es posible consideremos la función de onda en el mini-superspacio para dicho objeto

$$\psi(\phi) = \int D\phi D(\text{materia}) e^{-S - S_\partial} \quad (7.5)$$

donde la integral funcional es sobre el disco con las condiciones de contorno apropiadas y la medida es tal que  $\psi = 1$  cuando la constante cosmológica de frontera es nula. Al orden mas bajo uno encuentra para la función de onda

$$\psi = e^{-\mu_B e^{b\phi}} \quad (7.6)$$

lo que implica que la brana es un objeto extenso en la dirección de Liouville y se disuelve para

$$\phi_* \sim -\frac{1}{b} \log \mu_B \quad (7.7)$$

con lo que la punta de dicha brana puede utilizarse como una sonda en la región de acoplo fuerte. Con esta idea en la cabeza vemos que se puede interpretar la geometría de la cuerda como el moduli de la brana. Por tanto, para estudiar la geometría nos interesa considerar la amplitud de la FZZT brana como función del parámetro de moduli  $\mu_B$ .

Como ya estudiamos, en las cuerdas minimales de tipo  $M_{p,q}$  surge una geometría que interpretamos como el espacio-tiempo clásico donde dichas cuerdas se mueven que consiste en una superficie de Riemann definida usando la amplitud de la brana de tipo FZZT. Si  $\Phi(\mu, \mu_B)$  es la amplitud en el disco de la FZZT brana, donde  $\mu$  es la constante cosmológica y  $\mu_B$  la constante cosmológica de frontera, podemos definir las coordenadas de la superficie de Riemann

$$x \sim \mu_B \quad (7.8)$$

$$y \sim \partial_x \Phi \quad (7.9)$$

que están ligadas mediante la ecuación algebraica

$$F(x, y) = T_p(x) - T_q(y) = 0 \quad (7.10)$$

donde  $T_p$  denota los polinomios de Chebyshev de primera especie. Los puntos singulares en la superficie de Riemann vienen dados por  $F = \partial_x F = \partial_y F = 0$  y están relacionados con los estados en el anillo fundamental (estados de brana ZZ fundamentales). Como ya

vimos, esta geometría puede verse como el plano complejo  $x$  con una línea de ramificación semi-infinita en el eje real negativo y puntos singulares aislados (que corresponden a cortes de ramificación de tamaño nulo) situados en el eje real. En la interpretación geométrica tenemos que

$$\Phi \sim \int^x y dx \quad (7.11)$$

y para las branas ZZ

$$A_{ZZ} \sim \int y dx \quad (7.12)$$

donde la integral es sobre un camino cerrado en la superficie de Riemann que pasa por el punto singular asociado a la ZZ brana en cuestión. Dichos ciclos cerrados corresponden a los ciclos de tipo  $B$  en la homología de la superficie mientras que los ciclos  $A$  tienen tamaño nulo y están asociados a los puntos singulares. Es claro que la superficie de Riemann puede interpretarse como el espacio de módulos de las branas FZZT [44] con lo que es válido pensar en ella como el espacio-tiempo asociado a la cuerda minimal.

## 7.2. Sistema Mecánico Auxiliar

Consideremos un sistema integrable unidimensional, con una única cantidad conservada (la energía  $E$ ) y que representa a una partícula que se mueve en un potencial  $V(q)$ . Denotemos por  $p(q, E)$  el momento de la partícula. Ya vimos que podemos definir una acción asociada

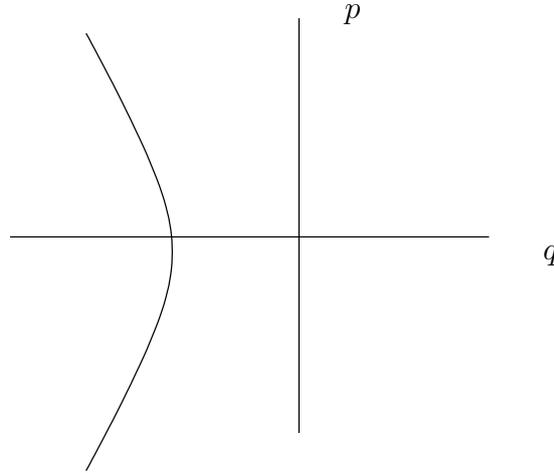
$$S(q, E) = \int^q p dq \quad (7.13)$$

La curva clásica en el espacio de fases  $\gamma$ , se define mediante

$$p = p(q, E) \quad (7.14)$$

y sobre ella esta confinando el movimiento del sistema en el límite clásico. Para un sistema tal que  $\gamma$  se una curva cerrada podemos definir también la variable de acción

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} p dq \quad (7.15)$$

Curva clásica para la cuerda minimal de tipo  $(2, 1)$ .

y la variable ángulo

$$\alpha = \partial_I S \quad (7.16)$$

Para un sistema en que la curva clásica no sea cerrada definimos  $I$  como la energía  $E$  y como  $\alpha$  el parámetro de uniformización de la curva clásica.

Queremos asociar con las cuerdas minimales de tipo  $(2, q = 2k - 1)$ , la amplitud en el disco de la brana FZZT  $\Phi$ , y la curva  $X_{2,q}$ , un sistema mecánico unidimensional integrable mediante el mapa

$$\Phi(x) = iS(q, E = 0) \quad (7.17)$$

donde  $q = x$  y  $S$  es la continuación analítica de (7.13). Mediante este mapa, la curva  $X_{2,q}$  definida mediante  $y = y(x)$  corresponde a la curva  $p = p(q, E = 0)$  en el plano de fases (la curva clásica asociada a la energía  $E = 0$ ).

Como ejemplo concreto vamos a considerar la cuerda minimal de tipo  $(2, 1)$  (que corresponde a gravedad topológica en dos dimensiones). La curva clásica viene dada por

$$2y^2 = x + 1 \quad (7.18)$$

que usando la correspondencia con el modelo mecánico nos da un potencial para el mismo

$$V(q) = (q + 1)/2 \quad (7.19)$$

con la curva  $p = p(q)$  que vemos en la figura. En general, para modelos del tipo  $(2, 2k - 1)$  tenemos

$$2y^2 = 2^{2(k-1)}(x + 1) \prod_{n=1}^{k-1} (x - x_{1,n})^2 \quad (7.20)$$

donde  $x_{1,l} = -\cos \frac{2\pi l}{2k-1}$ . La curva  $p = p(q)$  tiene la estructura que mostramos en la figura. La curva presenta singularidades en  $y = 0$  y  $x = x_{1,l}$  lo que refleja la existencia de estados de brana ZZ en estos modelos. Las singularidades en la geometría aparece en la figura como los puntos  $A_l$  (que, no olvidemos, están asociados con ciclos homológicos de la superficie de Riemann de tipo  $A$  con volumen nulo). El momento correspondiente al modelo mecánico auxiliar para esto modelos con branas ZZ viene dado por

$$p^2(q) = -2^{2k-3}(1 + q) \prod_{n=1}^{k-1} (q - x_{1,n})^2 \quad (7.21)$$

Si utilizamos la correspondencia, la aproximación WKB al orden mas bajo para la función de onda de la brana nos da

$$\psi = e^{iS(q,E=0)/\hbar} \quad (7.22)$$

que es la aproximación al orden mas bajo para la función de onda en el modelo mecánico. La idea básica de nuestra conjetura es que podemos tomarnos en serio la correspondencia y podemos utilizar los métodos estándar para la aproximación semiclásica que discutimos en el capítulo anterior para estudiar las correcciones cuánticas para la función de onda de la brana FZZT.

Hay que resaltar que el modelo mecánico que hemos definido aquí corresponde con las cantidades de la teoría de cuerdas (tras el límite continuo del modelo de matrices). Como veremos en una sección posterior, es posible definir un modelo mecánico análogo al modelo de matrices asociado a la cuerda minimal correspondiente. de tal modo que las curvas

clásicas que estamos encontrando aquí correspondan al zoom en el borde de la distribución de autovalores del resolvente del modelo de matrices. Para estos modelos mecánicos previos al límite continuo, el borde de la distribución de autovalores esta en correspondencia con los puntos de retorno clásicos del sistema mecánico análogo.

### 7.3. Cuantización de Cuerdas Minimales

Para organizar las correcciones cuánticas a la geometría clásica de la cuerda minimal vamos a considerar una analogía con un modelo mecánico clásico. Ya sabemos que la amplitud exacta para la brana de tipo FZZT puede escribirse al orden mas bajo en la aproximación WKB como

$$Z_{FZZT} \sim e^{\Phi/\kappa} \quad (7.23)$$

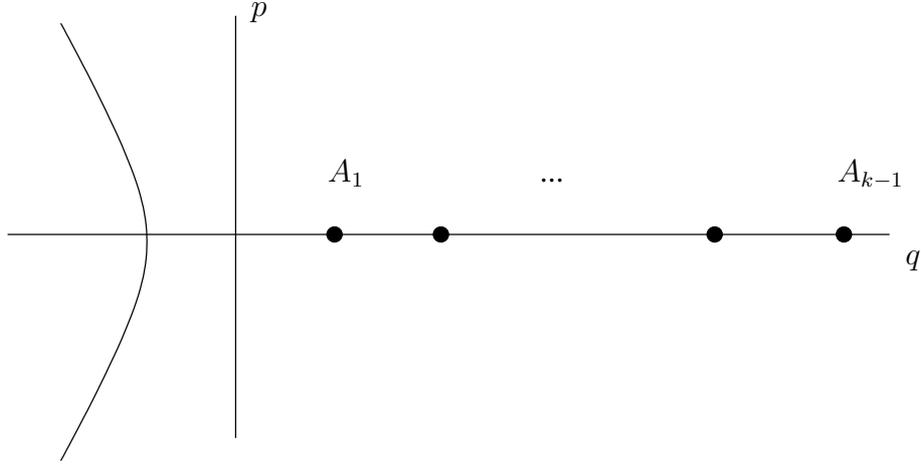
donde  $\Phi$  es la amplitud del disco y  $\kappa$  es la constante de acoplo de la cuerda. Esta expresión recuerda a la de la aproximación WKB para un sistema mecánico con acción  $S = -i\Phi$  y  $\hbar = \kappa$ . Esto nos induce a considerar la correspondencia entre cuerdas minimales y sistemas mecánicos con mas detalle.

Como primer paso en la cuantización de las cuerdas minimales vamos a considerar la cuantización semiclassical del modelo mecánico auxiliar. Mediante este mapa estamos identificando correcciones de genus mas alto en la cuerda con las correcciones cuánticas del sistema mecánico. De forma mas precisa, identificaremos la función de onda del estado de energía nula con la amplitud de la brana FZZT a todos los genus.

Para cuantizar el modelo mecánico vamos a introducir el álgebra de Heisenberg asociada

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (7.24)$$

El significado de este álgebra y de la constante  $\hbar$  en este contexto quedara claro en la siguiente sección cuando hablemos de los modelos de matrices. Para el valor  $E = 0$

Curva clásica para la cuerda minimal de tipo  $(2, 2k - 1)$ .

definimos en la aproximación WKB

$$Z_{FZZT}(x) = \psi_{E=0}(q) \sim \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial E}(q, E=0) \right|^{1/2} e^{iS(q, E=0)/\hbar} \quad (7.25)$$

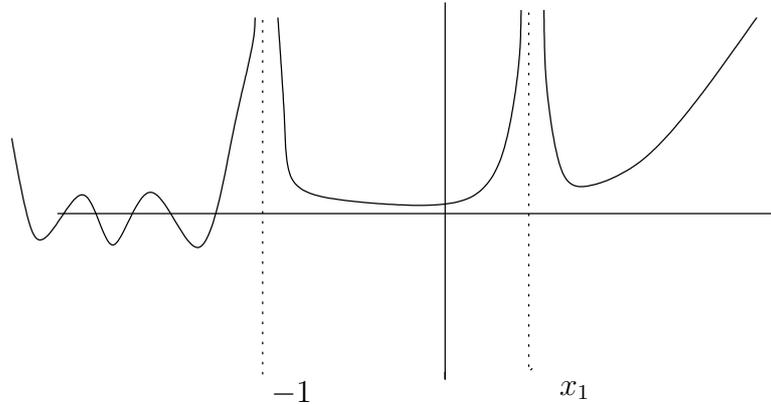
En el modelo  $(2, 1)$  es fácil encontrar el autoestado exacto. Viene dado por

$$\psi = Ai\left(\frac{q+1}{2^{1/3}\hbar^{2/3}}\right) \quad (7.26)$$

la función de Airy. Esta es precisamente la solución de la ecuación de Schroedinger

$$\hbar^2 \frac{d^2 \psi}{dq^2} - \frac{1+q}{2} \psi = 0 \quad (7.27)$$

Para el modelo  $(2, 3)$  encontramos, en la aproximación WKB la función que presentamos en la figura. Dicha función es divergente para  $q \sim \infty$ . Debido a las reglas de empalme que estudiamos en el capítulo anterior, el comportamiento asintótico de las funciones de onda debe tomarse de tal modo que para los modelos  $(2, 2k - 1)$  la función de onda sera nula en el infinito para  $k$  impar, pero explotara para  $k$  par. Esto de debe a que los modelos con  $k$  par no son consistentes desde un punto de vista no perturbativo [40, 80, 97].



Aproximación WKB para la función de onda del sistema asociado al modelo (2, 3).

### 7.3.1. Geometría Cuántica y Catástrofes

Para estudiar que le ocurre a la curva clásica definida por  $y = y(x)$ , o lo que es lo mismo  $p = p(q)$  en el contexto del modelo mecánico análogo, cuando la mecánica cuántica entra en juego consideremos la función de Wigner  $f(p, q)$  [95]. La función de Wigner es una generalización de la distribución de Boltzmann en el plano de fase. En el capítulo anterior la definimos mediante

$$f(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dx \psi(q+x) \psi^\dagger(q-x) e^{-2ipx/\hbar} \quad (7.28)$$

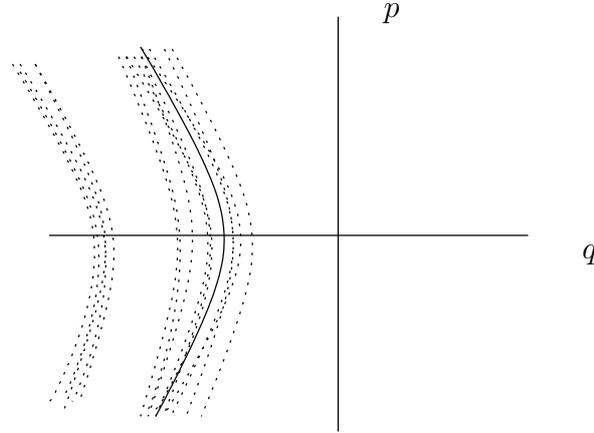
Nos interesamos por esta función ya que vimos que resulta sencillo estudiar las deformaciones cuánticas de  $p = p(q)$  en el espacio fásico. De hecho, su límite clásico corresponde a una función delta localizada sobre la curva clásica.

Si utilizamos la aproximación WKB para la función de onda  $\psi$  (función de onda asociada al autoestado de energía  $E$ ) encontramos la representación integral usual para la función de Wigner

$$f(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dx \frac{e^{i\Phi}}{|JJ|^{1/2}} \quad (7.29)$$

donde

$$\Phi = \int_{q-x}^{q+x} dq p(q) - 2px \quad (7.30)$$



Correcciones cuánticas a la curva clásica.

y

$$JJ = \frac{\partial I}{\partial p}(q+x, p(q+x)) \frac{\partial I}{\partial p}(q-x, p(q-x)) \quad (7.31)$$

que en primera aproximación nos da una divergencia sobre la curva clásica. Matemáticamente tenemos una catástrofe sobre los puntos de la curva. Usando la aproximación uniforme podemos suavizar dicha divergencia para obtener

$$f(p, q) = \frac{\sqrt{2}(\frac{3A}{2})^{1/6} Ai(-(\frac{3A}{2h})^{2/3})}{\pi h^{2/3} (I_q(2)I_p(1) - I_p(2)I_q(1))^{1/2}} \quad (7.32)$$

donde  $A$  esta definida en el capítulo anterior. El resultado neto que obtenemos para un sistema con curva clásica cerrada es un comportamiento oscilatorio en el interior de la curva y decaimiento en los puntos exteriores a la misma. Notar que la función de Airy representa las correcciones cuánticas de la distribución de Wigner cerca de la curva clásica como consecuencia de la catástrofe en la curva, y es genérica para cualquier sistema mecánico.

Cuando trasladamos la curva  $p = p(q)$  en la curva de la cuerda minimal asociada  $y = y(x)$  vemos que los efectos cuánticos producen una difuminación de la curva clásica. Desde este punto de vista, cuando interpretamos la geometría clásica de la cuerda minimal como el soporte en el límite clásico de la función de Wigner, vemos que el efecto neto de las correcciones cuánticas no consiste en modificar la curva sino difuminarla en el espacio

de fases de un modo determinado por el tipo de catástrofe definido por la curva clásica  $y = y(x)$  (ver figura).

### 7.3.2. Geometría Cuántica y el Fenómeno de Stokes

Como vemos, la resolución de la catástrofe en la curva clásica nos lleva a una función de Wigner definida en términos de la función de Airy. El papel que juega el fenómeno de Stokes en este contexto [44] es claro desde un punto de vista geométrico. De la representación integral de la función de Wigner se deduce que para puntos en el complemento convexo del conjunto cóncavo definido por la curva clásica, las soluciones que minimizan el exponente son imaginarias, dando lugar a contribuciones imaginarias al exponente de la representación integral de la función. El fenómeno de Stokes implícito en la función de Airy nos da la forma asintótica apropiada en el lado convexo, es decir, el decaimiento exponencial.

Para modelos de tipo  $(2, 2k - 1)$  la curva clásica contiene además un conjunto discreto de  $k - 1$  puntos en el lado convexo relacionados con la existencia de branas de tipo ZZ. En ese caso la función de Wigner, así como la función de onda  $\psi$ , presenta comportamiento oscilatorio en el lado cóncavo. Como siempre podemos considerar una deformación del modelo que mande el conjunto de puntos discretos a infinito, con lo que terminamos en el modelo  $(2, 1)$ , tenemos decaimiento exponencial en el lado convexo arbitrariamente cerca de la curva. Esto implica que la forma asintótica en el lado convexo decae exponencialmente solo cuando  $k$  es impar<sup>1</sup>.

## 7.4. Modelos de Matrices y Sistemas Mecánicos

Para dar una definición no perturbativa de las cuerdas minimales podemos usar el límite continuo de los modelos matriciales. Como estamos interesados en describir cuerdas de tipo

---

<sup>1</sup>La expresión para la función de onda en la aproximación WKB es  $\psi \sim (x + 1)^{-1/4} e^{-\int y dx/h}$  donde la rama que debemos escoger para  $y$  en la integral cambia en cada punto singular

( $2, 2k - 1$ ) vamos a pensar en los modelos de una matriz definidos por

$$e^Z \sim \int dM e^{-N \text{tr} V(M)/g} \quad (7.33)$$

En esta sección vamos a derivar el mapa entre cuerdas minimales y sistemas mecánicos usando el punto de vista de los modelos de matrices.

### 7.4.1. Funciones de Wigner

Vamos a denotar por  $\Pi_n(l)$  a los polinomios ortonormales del modelo matricial y vamos a introducir el conjunto completo de estados  $|\psi_n\rangle$  como

$$\langle l|\psi_n\rangle = \psi_n(l) = \Pi_n(l) e^{-NV(l)/2g} \quad (7.34)$$

y definimos el operador  $\hat{q}$  mediante

$$\langle \psi_m|\hat{q}|\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{h_m}{h_{m-1}}} \delta_{m,n+1} + \sqrt{\frac{h_n}{h_{n-1}}} \delta_{m+1,n} \quad (7.35)$$

Las relaciones de recurrencia entre polinomios ortogonales pueden expresarse como

$$\langle l|\hat{q}|\psi_n\rangle = l\psi_n(l) \quad (7.36)$$

con lo que podemos interpretar  $\hat{q}$  como el operador posición. El operador momento correspondiente puede definirse por

$$\langle l|\hat{p}|\psi_n\rangle = -i \frac{g}{N} \partial_l \psi_n(l) \quad (7.37)$$

Con esto, podemos considerar los estados  $|\psi_n\rangle$  como los elementos del espacio de Hilbert de un sistema mecánico con la constante  $g/N$  jugando el papel de la constante de Planck  $\hbar$ . Si definimos un estado mezcla con operador densidad

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (7.38)$$

nos encontramos con que

$$\frac{1}{N} \langle \text{tr} M^k \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{q}^k) \quad (7.39)$$

La función de Wigner correspondiente a dicho estado mezcla es

$$f(p, q) = \frac{1}{\pi \hbar} \int dx \langle q + x | \hat{\rho} | q - x \rangle e^{-ipx/\hbar} \quad (7.40)$$

con lo que tenemos que cualquier correlador en el modelo de matrices puede expresarse como un valor medio estadístico sobre el estado mezcla

$$\frac{1}{N} \langle \text{tr} M^k \rangle = \int dp \int dq f(p, q) q^k \quad (7.41)$$

Concretamente podemos escribir el resolvente como

$$R(x) = \int dl \frac{\rho_{\hbar}(l)}{x-l} = \int dp \int dq f(p, q) \frac{1}{x-q} \quad (7.42)$$

lo que nos implica que la densidad de autovalores viene dada por

$$\rho_{\hbar}(l) = \int dp f(p, l) \quad (7.43)$$

### 7.4.2. Analogía Mecánica

Ya que estamos considerando este estado mezcla como el correspondiente a un estado de equilibrio, resulta natural imponer que los estados  $|\psi_n\rangle$  sean estados estacionarios del modelo mecánico, es decir, autoestados del hamiltoniano

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad (7.44)$$

Podemos derivar información sobre  $\hat{H}$  usando la representación de la función de onda  $\psi_N(x)$  como un correlador en el modelo de matrices

$$\frac{1}{\sqrt{\hbar_N}} \langle \det(x - M) \rangle e^{-NV(x)/2g} = \psi_N(x) \quad (7.45)$$

Cuando  $N$  es pequeño (pero el acoplo  $g$  fijo) tenemos que

$$\langle \det(x - M) \rangle \sim e^{\langle \text{tr} \log(x-M) \rangle} = e^{N \int^x R(x)} \quad (7.46)$$

En este régimen sabemos que el resolvente tiene la estructura

$$R(x) \sim \frac{1}{2g}(V'(x) - y(x)) \quad (7.47)$$

de donde obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{h_N}} \langle \det(x - M) \rangle e^{-V(x)/2g} \sim \frac{1}{\sqrt{h_N}} e^{-N \int^x y(x)/2g} \quad (7.48)$$

Por otro lado, la aproximación WKB para  $|\psi_N\rangle$  nos da

$$\psi_N(x) \sim \frac{C}{\sqrt{p}} e^{i \int^x dx p(x, E_N)/\hbar} \quad (7.49)$$

lo que implica que

$$y(x) = ip(x, E_N) \quad \int dx y(x) = iS(x, E_N) \quad 2g/N = \hbar \quad (7.50)$$

que, tras tomar el límite continuo, nos dará el mapa entre cuerdas minimales y sistemas mecánicos.

### 7.4.3. Límite Continuo

Vamos a recordar un poco en que consistía el límite continuo en el contexto de los modelos de matrices. Las relaciones entre polinomios ortonormales

$$\int dl e^{-NV/g} \Pi'_n l \Pi_n = n \quad (7.51)$$

$$\int dl e^{-V/g} \Pi'_n l \Pi_n = N \sqrt{r_n} \int dl e^{-NV/g} \frac{V'}{g} \Pi_n \Pi_{n-1} \quad (7.52)$$

con  $r_n = h_n/h_{n-1}$  nos conduce en el límite de  $N$  muy grande a

$$g\xi = W(r(\xi)) + O(1/N) \quad (7.53)$$

donde  $\xi = n/N$  y  $r(\xi)$  es la función continua asociada a  $r_n$ . El comportamiento crítico de la cuerda minimal de tipo  $(2, 2k-1)$  se consigue ajustando los coeficientes del potencial  $V$  de tal modo que en algún  $r = r_c$

$$W'(r = r_c) = W''(r = r_c) = \dots = W^{(k-1)}(r = r_c) = 0 \quad (7.54)$$

si llamamos a  $W(r = r_c) = g_c$  el límite continuo consiste en

$$\frac{1}{N} = a^{2+\frac{1}{k}} \kappa \quad (7.55)$$

$$g_c - g\xi = a^2 \kappa^{-1/(1+\frac{1}{2k})} \quad (7.56)$$

$$l = l_c + xa^{2/k} \quad (7.57)$$

$$a \rightarrow 0 \quad (7.58)$$

donde  $l_c$  es la posición del borde de la distribución de autovalores. En este límite el parámetro  $\kappa$  es el que controla la expansión en genus y deviene en la constante de acoplo de la cuerda. Este zoom en el borde de la distribución de autovalores produce que donde teníamos un corte de ramificación de tamaño finito para el resolvente pasemos a tener un corte semi-infinito en el límite continuo.

El efecto del límite continuo sobre el sistema mecánico asociado con el modelo de matrices consiste en transformar el conjunto discreto de estados  $|\psi_n\rangle$  en un continuo  $|\psi_\xi\rangle$  de tal modo que los valores esperados de los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  devienen en los operadores de Lax del sistema. Debido al zoom en el borde de la distribución de autovalores el sistema mecánico se vuelve no acotado (la curva clásica deja de ser cerrada) y con correcciones cuánticas reguladas por  $\kappa$ . El límite continuo de la función de onda  $\psi_{E_N}$ , que llamaremos  $\psi_{E=0}$  (esto significa que estamos colocando el nivel de Fermi en  $E = 0$ ), es la que nos da la amplitud completa de la brana FZZT

$$\psi_{E=0}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \langle \det(x - M) \rangle e^{-NV(x)/2g}|_{l.c.} \quad (7.59)$$

que resulta ser la función de Baker-Akhiezer de la jerarquía integrable. Esto se ve simplemente de recordar el formalismo de fermiones libres para el modelo de matrices. El estado mezcla corresponde al estado colectivo de los  $N$  fermiones libres en el potencial  $V(l)$  y su límite continuo nos da la función de onda para los autovalores en dicho límite, que es por definición la función de Baker-Akhiezer.

## 7.5. Aproximación Semiclásica en la Función de Onda

El problema principal de la aproximación WKB es que no está bien definida en los puntos de retorno clásicos (que corresponden con los puntos de ramificación de la superficie de Riemann). Para ver esto pasemos a examinar la función de onda del sistema mecánico análogo

$$\psi \sim \frac{1}{\sqrt{p}} e^{iS/\hbar} \quad (7.60)$$

En los puntos de retorno clásicos  $p = 0$  con lo que la función de onda tiene una divergencia allí. Para eliminar dicha divergencia vamos a considerar el método de la aproximación uniforme [94]. Consideremos la curva asociada al modelo  $(2, 1)$ . La ecuación que satisface la función de onda es

$$\psi'' - \frac{q+1}{2\hbar^2} \psi = 0 \quad (7.61)$$

que tiene por solución la función de Airy

$$\psi = Ai\left(\frac{q+1}{2^{1/3}\hbar^{2/3}}\right) \quad (7.62)$$

que se corresponde con la función de Baker-Akhiezer del modelo de cuerdas.

Con este ejemplo vemos que la aproximación uniforme es en cierto sentido lo mismo que el límite continuo. En el límite continuo empezamos con un punto crítico en el potencial del modelo de matrices y hacemos un zoom sobre él para encontrar la expresión correspondiente de la amplitud de la FZZT brana. En el modelo mecánico hacemos un zoom sobre el punto de retorno clásico y encontramos una curva clásica efectiva. Las reglas que conectan las funciones de onda a ambos lados del punto de retorno son las que nos dan la función de onda correcta.

Este ejemplo presenta fenómeno de Stokes. Para ver este efecto en detalle vamos a considerar la representación integral de la función de Airy

$$Ai(q/\hbar^{2/3}) = \int du e^{iuq/\hbar^{2/3} + iu^3/3} \quad (7.63)$$

En el límite semiclásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) la integral puede calcularse en la aproximación extremal. Cuando  $\arg(q) > 2\pi/3$  la integral tiene contribuciones de 2 extremos con exponencial imaginario, lo que nos da un comportamiento oscilante en dicha región. Cuando  $\arg(q) < 2\pi/3$  tenemos también dos extremos con exponencial real que aparecen, pero uno de ellos es un máximo con lo que no da contribución en la aproximación extremal. Finalmente en dicha región encontramos que solo uno de los extremos contribuye y nos da un comportamiento de decaimiento exponencial. Este efecto nos dice que la transición de la contribución de dos extremos a la contribución de solo uno de ellos es suave y que no hay singularidad en el punto de retorno clásico. Esto significa también que, ya que la función de Airy no tiene puntos de ramificación en todo el plano complejo  $q$ , no existe la superficie de Riemann en la geometría cuántica exacta de la cuerda minimal, y que la geometría final es simplemente un plano complejo (con todos los objetos físicos holomorfos sobre el, luego en cierto sentido una recta real).

## 7.6. Catástrofes y Límite Continuo

Como hemos visto en la sección anterior, desde el punto de vista del análogo mecánico el límite continuo es equivalente a realizar un zoom en el borde de la distribución de autovalores, que corresponde al punto de retorno del sistema. Por tanto, la estrategia a seguir para derivar la función exacta de Baker-Akhiezer es

1. Empezando por el modelo de matrices, definir el sistema mecánico acotado correspondiente.
2. Cerca de la curva clásica  $p = p(q)$  tendremos una catástrofe de la función de Wigner del sistema.
3. Mediante el uso de la aproximación uniforme, podemos resolver la catástrofe cerca de la curva clásica.

4. Realizamos un zoom en la coordenada  $q$  cerca del punto de retorno.
5. Finalmente, podemos derivar la función de Baker-Akhiezer integrando la función de Wigner

$$\int dp f(p, q) = |\psi_{E=0}(q)|^2 \quad (7.64)$$

Vamos a ejemplificar este procedimiento en el caso del modelo (2, 1). El resolvente en el límite planar para este modelo es

$$R(l) = \frac{1}{2g}(l - \sqrt{l^2 - 4g}) \quad (7.65)$$

El sistema mecánico asociado estar definido por

$$p(q, E = E_N) = \sqrt{E_N - q^2} \quad (7.66)$$

donde  $E_N = 4g$ . La curva clásica en el plano de fases es una curva cerrada con un centro de simetría en el origen. Si usamos la aproximación uniforme para resolver la catástrofe tenemos

$$\int dp f(p, q) = \frac{\sqrt{8}}{\pi \hbar^{2/3}} \int_0^\infty dp \frac{(3A/2)^{1/6} Ai(-(3A/2\hbar)^{2/3})}{|I_q(2)I_p(1) - I_q(1)I_p(2)|^{1/2}} \quad (7.67)$$

donde  $A = A(p, q)$ . Si ahora hacemos el zoom en el punto de retorno  $q_t = 2\sqrt{g}$  tenemos

$$dp = \frac{|\frac{\partial p}{\partial q}(q, E_N)|^{1/2} (3A(0, q)/2)^{1/6}}{2\sqrt{-(3A(p, q)/2)^{2/3} + (3A(0, q)/2)^{2/3}}} d(-(3A(p, q)/2)^{2/3}) \quad (7.68)$$

$$I_q(2)I_p(1) - I_q(1)I_p(2) \rightarrow \frac{\partial p}{\partial q}(q, E_N) \frac{\partial I}{\partial p} \quad (7.69)$$

donde

$$p(q, E_N) \rightarrow \sqrt{-(q+1)/2} \quad (7.70)$$

De todo esto deducimos que

$$|\psi_{E=0}|^2 = \frac{(3A(0, q)/2)^{1/3}}{\pi \hbar^{2/3} |I_p|} \int_{-(3A(0, q)/2)^{2/3}}^\infty dV \frac{Ai(V/\hbar^{2/3})}{\sqrt{V + (3A(0, q)/2)^{2/3}}} \quad (7.71)$$

Si utilizamos la identidad

$$\int_{-y}^\infty dx \frac{Ai(x)}{\sqrt{x+y}} = 2^{2/3} \pi Ai^2(y/2^{2/3}) \quad (7.72)$$

llegamos al resultado conocido [44] para la función de Baker-Akhiezer en el límite continuo del modelo Gaussiano. Este ejemplo nos enseña que el significado del límite continuo es la resolución de la catástrofe de la curva clásica en el punto de retorno.

Es importante darse cuenta de que este método de derivación de la función de Baker-Akhiezer es general e independiente del tipo de punto crítico sobre el que estamos haciendo el límite continuo. En el caso de punto crítico de orden uno nos encontramos en el caso Gaussiano, la aproximación uniforme es sencilla y tras el límite continuo la función  $\psi_{E=0}$  puede escribirse en términos de la función de Airy. Por otro lado, si consideramos puntos críticos de ordenes mas altos necesitamos ser mas sofisticados para resolver la singularidad [94], pero el razonamiento de la sección 7.4 nos garantiza que estamos obteniendo la función de Baker-Akhiezer correspondiente.

## 7.7. Branass ZZ y Singularidades en el Espacio-Tiempo

Para modelos con  $k > 1$  la situación cambia ligeramente ya que aparecen correcciones asociadas a los estados de brana tipo ZZ. A primer orden en la constante de acoplo la presencia de estas branass ZZ modifica la superficie de Riemann clásica mediante

$$\delta y^2 = 2^{2m-3} \kappa \sum_n N_n \sqrt{1+x_n} \prod_{l \neq n} (x - x_l) \quad (7.73)$$

donde los  $x_n$  corresponden a las diferentes posiciones de las branass ZZ (las singularidades de la geometría clásica).  $N_n$  es el número de branass ZZ sobre cada punto singular. Esto nos fija que la ecuación diferencial que hemos de resolver teniendo en cuenta estas modificaciones es

$$\hbar^2 \psi'' + (p^2 + \hbar \delta p^2) \psi = 0 \quad (7.74)$$

donde

$$p^2(q) = -2^{2k-3} (1+q) \prod_{n=1}^{k-1} (q - x_{1,n})^2 \quad (7.75)$$

$$\delta p^2(q) = -2^{2k-3} \sum_n N_n \sqrt{1+x_n} \prod_{l \neq n} (q-x_l) \quad (7.76)$$

En la aproximación semiclásica se encuentra que la corrección debida a las branas ZZ modifica la función de onda WKB del modelo mecánico análogo solo por un factor multiplicativo

$$\prod_n \left( \frac{\sqrt{1+q} + \sqrt{q-x_n}}{\sqrt{1+x_n}} \right)^{2^{k-3/2} N_n} \quad (7.77)$$

Este factor no modifica las singularidades de la función de onda y tiende a una fase constante sobre ellas. En el lenguaje de la teoría de cuerdas eso implica que las singularidades de la superficie de Riemann continúan presentes en la expansión semiclásica (perturbativa). Solo los efectos no perturbativos asociados a la aproximación uniforme pueden suavizar las singularidades. Para estudiar la aproximación uniforme vamos a fijarnos en los puntos singulares (que corresponden con los puntos de retorno clásicos del sistema). Para el modelo  $(2, 2k-1)$  tenemos  $k$  puntos singulares. Uno de ellos está en  $q = -1$  y cerca de él tenemos que

$$p^2 \sim 1+q \quad (7.78)$$

como en el caso  $(2, 1)$ . Esto implica que cerca de este punto de retorno la función de onda se comporta como una función de Airy. Para el resto de puntos singulares  $x_n$  el momento clásico se comporta como

$$p^2 \sim (q-x_n)^2 \quad (7.79)$$

lo que implica que una resolución tipo Airy no es válida cerca de dichos puntos de retorno.

La función de onda cerca de dichos puntos tiene la forma

$$\psi \sim \frac{e^{\pm a(q-x_n)^2/2\hbar}}{(q-x_n)^{1/2}} \quad (7.80)$$

Si utilizamos las reglas de conexión estándar para este tipo de puntos de retorno [94] encontramos que la forma de la función de onda en dicho punto viene dada por

$$D_{-1/2} \left( -\frac{q-x_n}{(2\hbar)^{1/2} a^{-1/4}} \right) \quad (7.81)$$

y que hay un cambio en el comportamiento exponencial en el punto de retorno lo que implica que un decaimiento exponencial antes del punto de retorno nos da crecimiento exponencial tras el y viceversa. Este comportamiento esta de acuerdo con el hecho de que modelos con  $k$  par son inestables desde un punto de vista no perturbativo, ya que la función de onda asociada presenta una singularidad en  $x \sim \infty$ . Es importante notar que esta aproximación uniforme que estamos usando es la misma que tendríamos que usar si nos olvidásemos de las correcciones debidas a las branas ZZ. Esto es así porque cerca de dichos puntos singulares el prefactor se comporta como una fase constante en la función de onda.

Para ver como funciona todo esto en detalle vamos a considerar el modelo con solo un tipo de brana ZZ: El modelo (2, 3).

### 7.7.1. El Modelo (2, 3)

Para este modelo la superficie de Riemann clásica viene dada por

$$2y^2 = 1 + T_3(x) = 4(1+x)(x-x_1)^2 \quad (7.82)$$

donde  $x_1 = 1/2$ . Esta forma implica que tenemos un punto singular en la superficie de Riemann situado en  $x = x_1$ . La relación entre puntos singulares y branas ZZ [15] implica que solo tenemos un tipo de ZZ brana en nuestro modelo situada en  $x_1$ . Para estudiar el efecto de de la presencia de branas ZZ en la superficie de Riemann hay que notar que la amplitud del anillo entre la FZZT brana y  $N$  ZZ branas en  $x_1$  modifica la superficie de Riemann [18] con

$$\delta y^2 = 2\kappa\sqrt{1+x_1}N \quad (7.83)$$

donde  $\kappa$  es la constate de acoplo de la cuerda. Utilizando la analogía mecánica encontramos que la función de onda satisface la ecuación (notar que  $\hbar = \kappa$  en la analogía mecánica)

$$\hbar^2\psi'' = -(p^2 + \hbar\delta p^2)\psi \quad (7.84)$$

donde

$$p^2 = -2(1+q)(q-x_1)^2 \quad (7.85)$$

y

$$\delta p^2 = -2N\sqrt{1+x_1} \quad (7.86)$$

Si resolvemos la ecuación en la aproximación WKB nos encontramos con que

$$\psi \sim \frac{e^{\pm i f \chi / \hbar}}{\sqrt{\chi}} \left( \frac{\sqrt{1+q} + \sqrt{q-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \right)^{\pm N\sqrt{2}} \quad (7.87)$$

donde

$$\chi = \sqrt{2}\sqrt{-1-q}|q-x_1| \quad (7.88)$$

Cerca de  $q = -1$  esta función es singular y uno puede utilizar la función de Airy para eliminar la singularidad y uniformizarla. El comportamiento de la función de onda para  $q \sim -1$  y  $q < -1$  es

$$\psi \sim \frac{e^{\pm i\sqrt{8}|1+x_1|(-1-q)^{3/2}/3\hbar}}{\sqrt{\sqrt{2}|1+x_1|\sqrt{-1-q}}} i^{\pm N\sqrt{2}} \quad (7.89)$$

y para  $q > -1$

$$\psi \sim \frac{e^{\pm i\sqrt{8}|1+x_1|(1+q)^{3/2}/3\hbar}}{\sqrt{\sqrt{2}|1+x_1|\sqrt{1+q}}} i^{\pm N\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \quad (7.90)$$

Este tipo de aproximaciones WKB cerca de  $q \sim -1$  implican que el comportamiento correcto en  $q = -1$  viene dado por la función de Airy.

$$\psi \sim Ai\left((q+1)\frac{2^{1/3}(1+x_1)^{2/3}}{\hbar^{2/3}}\right) \quad (7.91)$$

que nos da el decaimiento exponencial que esperamos para  $q > -1$ .

Cerca de  $q = x_1$  nos encontramos con que la corrección inducida por la presencia de branas ZZ no elimina la singularidad en  $q = x_1$  y que el comportamiento de la función de onda viene dado por

$$\psi \sim \frac{e^{-\sqrt{2}|1+x_1|(q-x_1)^2/2\hbar}}{\sqrt{\sqrt{2}|q-x_1|\sqrt{1+x_1}}} e^{i\pi/4} \quad (7.92)$$

para  $q < x_1$  (notar que la regularización anterior mediante la función de Airy nos fija el decaimiento exponencial)), y

$$\psi \sim \frac{e^{\pm\sqrt{2}|1+x_1|(q-x_1)^2/2\hbar}}{\sqrt{\sqrt{2}|q-x_1|\sqrt{1+x_1}}} e^{i\pi/4} \quad (7.93)$$

para  $q > x_1$ . la aproximación WKB es singular, pero si utilizamos la aproximación uniforme [94] para este caso encontramos que el comportamiento correcto para la función de onda cerca de  $q = x_1$  es

$$\psi \sim 2^{1/4} \frac{\hbar^{1/4}}{(2+2x_1)^{1/8}} D_{-1/2}\left(-\frac{(2+2x_1)^{1/4}}{\sqrt{2\hbar}}(q-x_1)\right) e^{i\pi/4} \quad (7.94)$$

donde  $D_{-1/2}(-x/\sqrt{2})$  es la función parabólico-cilíndrica solución de la ecuación

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi - x^2\psi = 0 \quad (7.95)$$

Esta uniformización fija el comportamiento para  $q > x_1$  a

$$\psi \sim \frac{e^{+\sqrt{2}|1+x_1|(q-x_1)^2/2\hbar}}{\sqrt{\sqrt{2}|q-x_1|\sqrt{1+x_1}}} e^{i\pi/4} \quad (7.96)$$

Que refleja la inestabilidad no perturbativa del modelo.

Esta construcción prueba que la aproximación uniforme en los puntos de retorno elimina los puntos de ramificación que aparecen en las diferentes expansiones asintóticas. Este hecho es claro desde un punto de vista mecano-cuántico ya que para un potencial sin puntos de ramificación la solución de la ecuación de Schroedinger unidimensional debe ser univaluada.



# Capítulo 8

## Conclusiones

En esta memoria hemos pretendido estudiar la estructura cuántica de la geometría de los modelos de cuerda minimal de tipo  $(2, 2k - 1)$ . Debido a que la teoría presenta una zona de acoplo fuerte marcada por valores grandes del modo de Liouville, la aproximación cerrada al estudio de la geometría resulta infructuosa. Para tener en cuenta todos los efectos no perturbativos que deforman la geometría del espacio resulta conveniente definir nuestra geometría en términos del moduli de cierto tipo de D-brana. El definir dichas D-branas implica que debemos introducir cuerdas abiertas en nuestra teoría conforme, lo que nos presenta dos tipos nuevos de objetos: La brana FZZT (condiciones Neumann en la dirección de Liouville) y la brana ZZ (condiciones Dirichlet en la dirección de Liouville). Para definir nuestra geometría hemos usado la amplitud de la FZZT brana. Dicha amplitud es una función de cierto parámetro de moduli (la constante cosmológica de frontera), y a nivel clásico presenta ciertos cortes de ramificación lo que nos indica que clásicamente la geometría de nuestra cuerda corresponde a una superficie de Riemann. Hemos visto que dicha superficie de Riemann presenta ciertas singularidades asociadas a las branas de tipo ZZ.

Con la idea de ir mas allá del nivel clásico debemos utilizar la descripción en términos de matrices de la cuerda minimal para así poder calcular las correcciones cuánticas. Lo

que encontramos es que las correcciones cuánticas eliminan los cortes de ramificación de la amplitud de la FZZT brana con lo que encontramos una geometría que es simplemente el plano complejo.

Para organizar todas estas correcciones cuánticas hemos estudiado en detalle una analogía entre estas cuerdas y ciertos sistemas mecánicos. La correspondencia se define de tal modo que la curva clásica de la cuerda corresponde con la curva clásica en el espacio de fases en el sistema mecánico, y la función de onda del sistema mecánico corresponde a la amplitud de la FZZT brana. Para estudiar las correcciones cuánticas nos hemos servido de la aproximación uniforme en el sistema mecánico lo que ha permitido comprobar que la geometría clásica se modifica drásticamente en presencia de efectos cuánticos, y que dichos efectos corresponden con las correcciones en la constante de acoplo de la cuerda. Se han estudiado estos efectos tanto a nivel de función de onda como en el espacio de fases utilizando el formalismo de Weyl-Wigner. También hemos definido una analogía mecánica con el modelo de matrices lo que ha permitido ver la relación entre límite continuo en teoría de cuerdas y aproximación uniforme en mecánica cuántica. Finalmente se ha estudiado el efecto de las correcciones debidas a la presencia de branas de tipo ZZ y se ha visto que la correcciones perturbativas no son suficientes para eliminar las singularidades y que se hace necesario tener en cuenta los efectos no perturbativos asociados a la aproximación uniforme completa para resolver las singularidades en la geometría.

# Agradecimientos

Antes que a nadie, agradecer a César por haber sido un director de tesis fantástico, por la cantidad de física que he aprendido con él, por saber siempre ver los problemas interesantes y por haberme presionado cuando ha sido necesario (que lo ha sido).

También quiero agradecer al Departamento de Física Teórica el que me hayan acogido en su seno durante este tiempo, y en especial a Enrique Álvarez por haber confiado en mí y permitirme dedicarme a esto nada más terminar la carrera.

Gracias a todos los miembros de Instituto de Física Teórica por crear un ambiente de trabajo excelente.

Gracias toda la gente que he conocido estos años y que ya vuelan por el mundo (Olga, Ernesto, David, Alicia, Ana, Natxo, Juanjo, Juan, Jorge, Daniel...) y a los que aun están por aquí (el argentino, Carlos (ánimo, que ya queda poco), Sergio (mi hermano científico!) Irene, Edu...) así como a las nuevas generaciones (Sergio, África...). Y al perro de Marcos por supuesto (aún me duele la cabeza de la última juerga).

Gracias a mis compañeros de despacho (Jorge, Juanjo Sergio) por aguantar mis manías y ser siempre los mejores compañeros del mundo (Anatoli Karpov merece que perpetuemos su memoria).

Gracias a Lorenzo por estar tan loco y hacer siempre la pregunta que nadie espera y que te rompe definitivamente los esquemas (cuando seas multimillonario acuerdate de los amigos!). Y también a Patri por supuesto.

De fuera de la facultad la lista es casi interminable (tengo tantas cosas que agradecer!).

Los primeros serian mis padres (Paulino y Pilar) por la paciencia que han tenido conmigo y por lo bien que me han encauzado. También a mi hermano Victor (el artista de la familia) simplemente por ser como es. Gracias a mis amigos del cole (Esteban, Alberto, Javier, Camelia, Carmen, Miriam,...) y en especial a Jorge que continua aguantándome pese a convivir durante años bajo un mismo techo con mi persona.

Muchas gracias a Alberto por ser quien es y porque los años no se nos notan.

Y por supuesto gracias a Elena por dejarme intentar hacerla feliz.

Y a todo el mundo que se me olvida, ya que son las 4 de la mañana, estoy en la facultad y llevo 48 horas sin dormir: Muchas Gracias.

# Apéndice A

## El Fenómeno de Stokes

Vamos a considerar la integral

$$I(x) = \int_{\gamma_0} e^{-\frac{1}{\kappa}F(z,x)} \quad (\text{A.1})$$

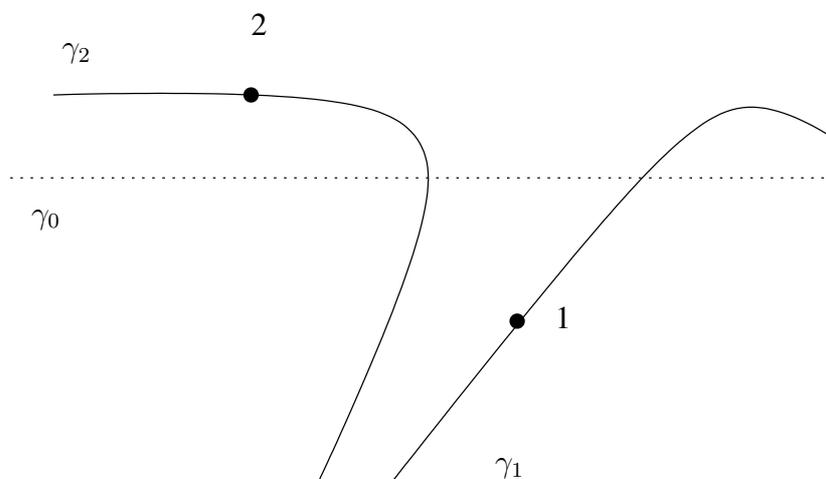
donde  $F(z, x)$  es holomorfa en  $z$  y  $\gamma_0$  es un contorno en el plano complejo  $z$  tal que la integral existe y admite continuación analítica en cierta región del plano complejo  $x$ . Estamos interesados en el comportamiento asintótico de la integral cuando  $\kappa \rightarrow 0$ .

Ya que la función  $F$  es holomorfa en  $z$ , las líneas con  $ImF$  constante son perpendiculares a las líneas con  $ReF$  constante. Deformemos el contorno  $\gamma_0$  a un contorno  $\gamma$  a lo largo del cual  $ImF$  sea constante (con lo que  $\gamma$  es una línea gradiente de  $ReF$ ). En un punto genérico dichas líneas no se cruzan, pero en los puntos mínimos de  $F$  que son aquellos tales que

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

tenemos dos líneas gradiente que se cruzan.

Típicamente los diferentes puntos mínimos de  $F$  tendrán diferentes valores de  $ImF$  con lo que no podremos encontrar un contorno  $\gamma$  que pase por todos ellos. Si tenemos dos contornos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que pasan por dos puntos mínimos de  $F$ , 1 y 2, y que pasan cerca el uno del otro con comportamiento asintótico apropiado, podemos intentar deformar  $\gamma_0$  del siguiente

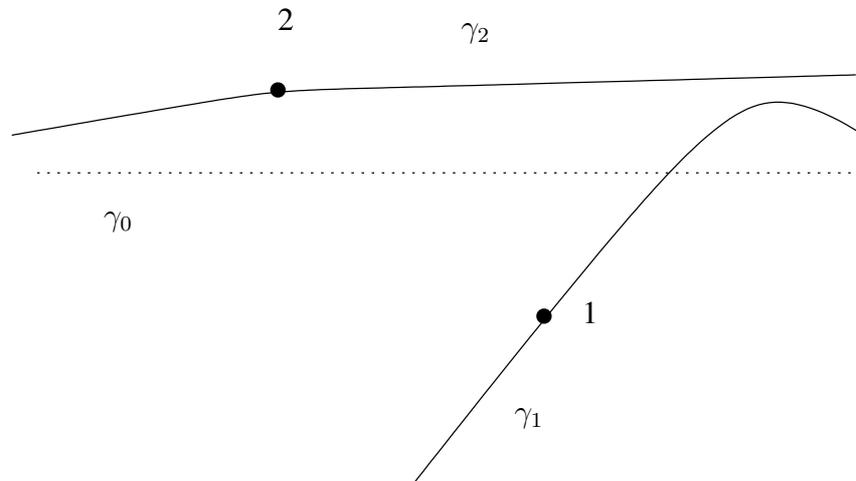


Situación para  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . los dos mínimos dan contribución a la integral.

modo: Empecemos cerca de  $\gamma_1$  hasta que pase por el punto 1, para después pasar por el punto 2 y terminar cerca de  $\gamma_2$ . Dicho contorno sera compatible con el comportamiento asintótico de  $\gamma_0$ . Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tiene el mismo comportamiento asintótico en el infinito y  $ReF \rightarrow \infty$  allí podemos fijar  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Por esta construcción esta claro que ambos puntos dan contribución a la integral. Vamos ahora a variar el parámetro  $x$  y a estudiar que le pasa a los puntos mínimos de  $F$  y al contorno  $\gamma$ . Un primer fenómeno ocurre cuando cuando los puntos cambian su régimen de dominancia. Esto ocurren en las líneas del plano complejo  $x$  donde los valores de  $ReF$  en ambos puntos coinciden. Estas líneas se llaman de anti-Stokes. Un segundo fenómeno ocurre cuando el valor de  $ImF$  coincide en ambos puntos y la topología de los contornos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  cambia. Esto se da en líneas del plano complejo  $x$  conocidas como líneas de Stokes. Al cruzar dichas líneas el contorno  $\gamma$  con comportamiento asintótico correcto no pasa por los dos puntos, sino solo por uno de ellos. Es posible encontrar un contorno que pase por ambos puntos, pero no tiene un comportamiento asintótico compatible con  $\gamma_0$ .

A modo de ejemplo vamos a considerar la función de Airy

$$\int_{\gamma_0} e^{\frac{i}{\kappa}(xz+z^3/3)} \quad (\text{A.3})$$



Situación con  $\gamma = \gamma_2$ . Solo uno de los dos mínimos da contribución a la integral.

donde  $\gamma_0$  es el eje real en el plano complejo  $z$ . El comportamiento para  $|z| \rightarrow \infty$  nos permite deformar el contorno empezando en la región del plano con  $\frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$  y terminando en la región del plano con  $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$ . Los dos puntos mínimos de  $F$  están en

$$z = \pm\sqrt{-x} \quad (\text{A.4})$$

Tenemos una línea de anti-Stokes en el eje real negativo del plano complejo  $x$ . En dicha línea ambos mínimos son imaginarios puros ( $\text{Re}F = 0$ ) e intercambian régimen de dominación. Las líneas de Stokes están situadas en los puntos con  $|\arg(x)| = 2\pi/3$ . Por tanto para  $\frac{2\pi}{3} \leq |\arg(x)| \leq \pi$  tenemos contribuciones de ambos puntos de mínimo mientras que en la región  $0 \leq |\arg(x)| \leq \frac{2\pi}{3}$  solo da contribución a la integral uno de ellos.



# Bibliografía

- [1] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 1: Introduction,” 1987. Cambridge, UK: Univ. Pr. ( 1987) 469 P. ( Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
- [2] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology,” 1987. Cambridge, UK: Univ. Pr. ( 1987) 596 P. ( Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
- [3] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” 1998. 402pp. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p.
- [4] J. Polchinski, “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,” 1998. 531pp. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p.
- [5] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [arXiv:hep-th/9510017].
- [6] C. V. Johnson, “D-brane primer,” arXiv:hep-th/0007170.
- [7] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, “M theory as a matrix model: A conjecture,” *Phys. Rev. D* **55** (1997) 5112 [arXiv:hep-th/9610043].
- [8] H. Dorn and H. J. Otto, “Some conclusions for noncritical string theory drawn from two and three point functions in the Liouville sector,” arXiv:hep-th/9501019.

- [9] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory,” Nucl. Phys. B **477**, 577 (1996) [arXiv:hep-th/9506136].
- [10] J. Teschner, “On the Liouville three point function,” Phys. Lett. B **363**, 65 (1995) [arXiv:hep-th/9507109].
- [11] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Boundary Liouville field theory. I: Boundary state and boundary two-point function,” arXiv:hep-th/0001012.
- [12] J. Teschner, “Remarks on Liouville theory with boundary,” arXiv:hep-th/0009138.
- [13] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Liouville field theory on a pseudosphere,” arXiv:hep-th/0101152.
- [14] B. Ponsot and J. Teschner, “Boundary Liouville field theory: Boundary three point function,” Nucl. Phys. B **622**, 309 (2002) [arXiv:hep-th/0110244].
- [15] N. Seiberg and D. Shih, “Branes, rings and matrix models in minimal (super)string theory,” JHEP **0402**, 021 (2004) [arXiv:hep-th/0312170].
- [16] D. Gaiotto and L. Rastelli, “A paradigm of open/closed duality: Liouville D-branes and the Kontsevich model,” JHEP **0507**, 053 (2005) [arXiv:hep-th/0312196].
- [17] M. Hanada, M. Hayakawa, N. Ishibashi, H. Kawai, T. Kuroki, Y. Matsuo and T. Tada, “Loops versus matrices: The nonperturbative aspects of noncritical string,” Prog. Theor. Phys. **112**, 131 (2004) [arXiv:hep-th/0405076].
- [18] D. Kutasov, K. Okuyama, J. w. Park, N. Seiberg and D. Shih, “Annulus amplitudes and ZZ branes in minimal string theory,” JHEP **0408**, 026 (2004) [arXiv:hep-th/0406030].

- [19] J. Ambjorn, S. Arianos, J. A. Gesser and S. Kawamoto, “The geometry of ZZ-branes,” *Phys. Lett. B* **599**, 306 (2004) [arXiv:hep-th/0406108].
- [20] J. McGreevy and H. L. Verlinde, “Strings from tachyons: The  $c = 1$  matrix reloaded,” *JHEP* **0312**, 054 (2003) [arXiv:hep-th/0304224].
- [21] E. J. Martinec, “The annular report on non-critical string theory,” arXiv:hep-th/0305148.
- [22] I. R. Klebanov, J. Maldacena and N. Seiberg, “D-brane decay in two-dimensional string theory,” *JHEP* **0307**, 045 (2003) [arXiv:hep-th/0305159].
- [23] J. McGreevy, J. Teschner and H. L. Verlinde, “Classical and quantum D-branes in 2D string theory,” *JHEP* **0401**, 039 (2004) [arXiv:hep-th/0305194].
- [24] I. R. Klebanov, J. Maldacena and N. Seiberg, “Unitary and complex matrix models as 1-d type 0 strings,” *Commun. Math. Phys.* **252**, 275 (2004) [arXiv:hep-th/0309168].
- [25] F. David, “A Model Of Random Surfaces With Nontrivial Critical Behavior,” *Nucl. Phys. B* **257**, 543 (1985).
- [26] V. A. Kazakov, “Bilocal Regularization Of Models Of Random Surfaces,” *Phys. Lett. B* **150**, 282 (1985).
- [27] V. A. Kazakov, A. A. Migdal and I. K. Kostov, “Critical Properties Of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces,” *Phys. Lett. B* **157**, 295 (1985).
- [28] V. A. Kazakov, “Ising Model On A Dynamical Planar Random Lattice: Exact Solution,” *Phys. Lett. A* **119**, 140 (1986).
- [29] D. V. Boulatov and V. A. Kazakov, “The Ising Model On Random Planar Lattice: The Structure Of Phase Transition And The Exact Critical Exponents,” *Phys. Lett.* **186B**, 379 (1987).

- [30] V. A. Kazakov and A. A. Migdal, “Recent Progress In The Theory Of Noncritical Strings,” Nucl. Phys. B **311**, 171 (1988).
- [31] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).
- [32] J. Distler and H. Kawai, “Conformal Field Theory And 2-D Quantum Gravity Or Who’s Afraid Of Joseph Liouville?,” Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).
- [33] I. K. Kostov, “Strings Embedded In Dynkin Diagrams,” SACLAY-SPH-T-90-133 *Lecture given at Cargese Mtg. on Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings, Cargese, France, May 27 - Jun 2, 1990*
- [34] I. K. Kostov, “Multiloop correlators for closed strings with discrete target space,” Phys. Lett. B **266**, 42 (1991).
- [35] I. K. Kostov, “Strings with discrete target space,” Nucl. Phys. B **376**, 539 (1992) [arXiv:hep-th/9112059].
- [36] G. W. Moore, N. Seiberg and M. Staudacher, “From loops to states in 2-D quantum gravity,” Nucl. Phys. B **362**, 665 (1991).
- [37] M. Goulian, “The Ising model on a fluctuating disk,” Phys. Lett. B **264**, 292 (1991).
- [38] P. Di Francesco and D. Kutasov, “Integrable Models Of Two-Dimensional Quantum Gravity,” PUPT-1206 *Presented at Cargese Workshop on Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings, Cargese, France, May 27 - Jun 2, 1990*
- [39] M. Goulian and M. Li, “Correlation Functions In Liouville Theory,” Phys. Rev. Lett. **66**, 2051 (1991).
- [40] M. R. Douglas, N. Seiberg and S. H. Shenker, “Flow And Instability In Quantum Gravity,” Phys. Lett. B **244**, 381 (1990).

- [41] E. Brezin and V. A. Kazakov, “Exactly Solvable Field Theories Of Closed Strings,” *Phys. Lett. B* **236**, 144 (1990).
- [42] D. J. Gross and A. A. Migdal, “Nonperturbative Solution Of The Ising Model On A Random Surface,” *Phys. Rev. Lett.* **64**, 717 (1990).
- [43] M. R. Douglas, “Strings In Less Than One-Dimension And The Generalized K-D-V Hierarchies,” *Phys. Lett. B* **238**, 176 (1990).
- [44] J. Maldacena, G. W. Moore, N. Seiberg and D. Shih, “Exact vs. semiclassical target space of the minimal string,” *JHEP* **0410**, 020 (2004) [arXiv:hep-th/0408039].
- [45] C. Gomez, S. Montanez and P. Resco, “Semi-classical mechanics in phase space: The quantum target of minimal strings,” *JHEP* **0511**, 049 (2005) [arXiv:hep-th/0506159].
- [46] C. Gomez, S. Montanez and P. Resco, “Minimal strings and semiclassical expansion,” arXiv:hep-th/0602278.
- [47] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal field theory,” 1997. New York, USA: Springer (1997) 890 p.
- [48] V. G. Kac, “Lecture Notes in Physics,” 94, Springer-Verlag, 1979, 441
- [49] B. L. Feigin, D.B. Fuchs, “Verma modules over the Virasoro algebra,” at “Topology, proceedings of the Leningrad conference 1982,” *Lecture Notes in Mathematics*, 1060, Springer-Verlag, 1985.
- [50] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, “Infinite Conformal Symmetry In Two-Dimensional Quantum Field Theory,” *Nucl. Phys. B* **241**, 333 (1984).
- [51] N. Seiberg, “Notes On Quantum Liouville Theory And Quantum Gravity,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102** (1990) 319.

- [52] A. M. Polyakov, "Quantum Geometry Of Bosonic Strings," *Phys. Lett. B* **103**, 207 (1981).
- [53] J. L. Gervais and A. Neveu, "The Dual String Spectrum In Polyakov's Quantization. 1," *Nucl. Phys. B* **199**, 59 (1982).
- [54] J. L. Gervais and A. Neveu, "Dual String Spectrum In Polyakov's Quantization. 2. Mode Separation," *Nucl. Phys. B* **209**, 125 (1982).
- [55] J. L. Gervais and A. Neveu, "New Quantum Treatment Of Liouville Field Theory," *Nucl. Phys. B* **224**, 329 (1983).
- [56] J. L. Gervais and A. Neveu, "Novel Triangle Relation And Absence Of Tachyons In Liouville String Field Theory," *Nucl. Phys. B* **238**, 125 (1984).
- [57] J. L. Gervais and A. Neveu, "Locality In Strong Coupling Liouville Field Theory And String Models For Seven-Dimensions, Thirteen-Dimensions And Nineteen-Dimensions," *Phys. Lett. B* **151**, 271 (1985).
- [58] J. L. Gervais, "The Quantum Group Structure Of 2-D Gravity And Minimal Models," *Commun. Math. Phys.* **130**, 257 (1990).
- [59] T. L. Curtright and C. B. Thorn, "Conformally Invariant Quantization Of The Liouville Theory," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1309 (1982) [Erratum-ibid. **48**, 1768 (1982)].
- [60] E. Braaten, T. Curtright and C. B. Thorn, "Quantum Backlund Transformation For The Liouville Theory," *Phys. Lett. B* **118**, 115 (1982).
- [61] E. Braaten, T. Curtright and C. B. Thorn, "An Exact Operator Solution Of The Quantum Liouville Field Theory," *Annals Phys.* **147**, 365 (1983).

- [62] E. Braaten, T. Curtright, G. Ghandour and C. B. Thorn, “Nonperturbative Weak Coupling Analysis Of The Liouville Quantum Field Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **51**, 19 (1983).
- [63] E. Braaten, T. Curtright, G. Ghandour and C. B. Thorn, “Nonperturbative Weak Coupling Analysis Of The Quantum Liouville Field Theory,” *Annals Phys.* **153**, 147 (1984).
- [64] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Wave Function Of The Universe,” *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983).
- [65] J. Polchinski, “Remarks On The Liouville Field Theory,” UTTG-19-90 *Presented at Strings '90 Conf., College Station, TX, Mar 12-17, 1990*
- [66] P. H. Ginsparg, “Matrix models of 2-d gravity,” arXiv:hep-th/9112013.
- [67] P. Di Francesco, P. H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, “2-D Gravity and random matrices,” *Phys. Rept.* **254** (1995) 1 [arXiv:hep-th/9306153].
- [68] P. H. Ginsparg and G. W. Moore, “Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory,” arXiv:hep-th/9304011.
- [69] B. H. Lian and G. J. Zuckerman, “New perspectives on the BRST algebraic structure of string theory,” *Commun. Math. Phys.* **154**, 613 (1993) [arXiv:hep-th/9211072].
- [70] B. H. Lian, “Semiinfinite homology and 2-D quantum gravity,” UMI-92-21392
- [71] B. H. Lian and G. J. Zuckerman, “New selection rules and physical states in 2-D gravity: Conformal gauge,” *Phys. Lett. B* **254**, 417 (1991).
- [72] D. Kutasov, E. J. Martinec and N. Seiberg, “Ground rings and their modules in 2-D gravity with  $c_{\bar{j}} = 1$  matter,” *Phys. Lett. B* **276**, 437 (1992) [arXiv:hep-th/9111048].

- [73] P. Di Francesco and J. B. Zuber, “Fusion potentials. 1,” *J. Phys. A* **26**, 1441 (1993) [arXiv:hep-th/9211138].
- [74] C. Imbimbo, “New modular representations and fusion algebras from quantized  $SL(2,R)$  Chern-Simons theories,” arXiv:hep-th/9301031.
- [75] C. Imbimbo, “Polynomial fusion rings from  $SL(2,R)$  Chern-Simons theory,” *Phys. Lett. B* **308**, 51 (1993).
- [76] D. Bessis, C. Itzykson and J. B. Zuber, “Quantum Field Theory Techniques In Graphical Enumeration,” *Adv. Appl. Math.* **1**, 109 (1980).
- [77] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov, “Lie Algebras And Equations Of Korteweg-De Vries Type,” *J. Sov. Math.* **30**, 1975 (1984).
- [78] M. R. Douglas, “The Two Matrix Model,” In \*Cargese 1990, Proceedings, Random surfaces and quantum gravity\* 77-83. (see HIGH ENERGY PHYSICS INDEX 30 (1992) No. 17911).
- [79] V. A. Kazakov, “The Appearance Of Matter Fields From Quantum Fluctuations Of 2-D Gravity,” *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 2125 (1989).
- [80] F. David, “Loop Equations And Nonperturbative Effects In Two-Dimensional Quantum Gravity,” *Mod. Phys. Lett. A* **5**, 1019 (1990).
- [81] F. David, “Phases Of The Large N Matrix Model And Nonperturbative Effects In 2-D Gravity,” *Nucl. Phys. B* **348**, 507 (1991).
- [82] G. W. Moore, “Geometry Of The String Equations,” *Commun. Math. Phys.* **133**, 261 (1990).
- [83] K. Hosomichi, “Bulk-boundary propagator in Liouville theory on a disc,” *JHEP* **0111**, 044 (2001) [arXiv:hep-th/0108093].

- [84] B. Ponsot, “Liouville theory on the pseudosphere: Bulk-boundary structure constant,” *Phys. Lett. B* **588**, 105 (2004) [arXiv:hep-th/0309211].
- [85] C. V. Johnson, “Non-perturbative string equations for type 0A,” *JHEP* **0403**, 041 (2004) [arXiv:hep-th/0311129].
- [86] I. K. Kostov, “Loop amplitudes for nonrational string theories,” *Phys. Lett. B* **266**, 317 (1991).
- [87] I. K. Kostov, “Loop space Hamiltonian for  $c = 1$  open strings,” *Phys. Lett. B* **349**, 284 (1995) [arXiv:hep-th/9501135].
- [88] I. K. Kostov, “Boundary correlators in 2D quantum gravity: Liouville versus discrete approach,” *Nucl. Phys. B* **658**, 397 (2003) [arXiv:hep-th/0212194].
- [89] J. M. Daul, V. A. Kazakov and I. K. Kostov, “Rational theories of 2-D gravity from the two matrix model,” *Nucl. Phys. B* **409**, 311 (1993) [arXiv:hep-th/9303093].
- [90] G. W. Moore, “Matrix Models Of 2-D Gravity And Isomonodromic Deformation,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102**, 255 (1990).
- [91] E. Witten, “Topological Gravity,” *Phys. Lett. B* **206**, 601 (1988).
- [92] J. M. F. Labastida, M. Pernici and E. Witten, “Topological Gravity In Two-Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **310**, 611 (1988).
- [93] E. Witten, “On The Structure Of The Topological Phase Of Two-Dimensional Gravity,” *Nucl. Phys. B* **340**, 281 (1990).
- [94] M.V. Berry, K.E. Mount, “Semiclassical approximations in wave mechanics”, *Rep. Prog. Phys.* **35** (1972) 315-397
- [95] M.V. Berry, “Semiclassical mechanics in phase space: A study of Wigner’s function” *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A* **287** (1977) 237

- [96] R. Thom , “Structural stability and morphogenesis”, Reading Mass. Benjamin (1975)
- [97] E. Brezin, E. Marinari and G. Parisi, “A Nonperturbative Ambiguity Free Solution Of A String Model,” Phys. Lett. B **242**, 35 (1990).